

Corso di laurea in Matematica
Sistemi dinamici – Primo Modulo

PROVA D'ESAME 15-02-99

Una sbarra omogenea di massa m e lunghezza ℓ è vincolata a muoversi in un piano verticale π ; un estremo A della sbarra è incernierato a un punto fisso O , mentre l'altro B è collegato tramite una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k a un punto Q , di massa m , libero di muoversi lungo la verticale r condotta per O .

(1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane l'angolo θ che la sbarra forma con la verticale discendente e la coordinata di Q lungo l'asse r .

(2) Determinare le posizioni d'equilibrio e discuterne la stabilità, limitandosi ai soli casi che si possono risolvere mediante un'analisi al secondo ordine.

(3) Rispondere a scelta a una delle due seguenti domande:

(3.1) Discutere i casi che non si possono risolvere con la sola analisi al secondo ordine.

(3.2) Determinare le reazioni vincolari che agiscono sul punto Q .

(4) Si consideri il sistema modificato nel modo seguente. La molla considerata precedentemente collega ora il punto B a un punto Q senza massa libero di scorrere lungo l'asse r in modo tale che la forza elastica sia sempre ortogonale all'asse r . Inoltre il piano π ruota intorno all'asse r con velocità angolare costante ω . Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange per il sistema così modificato.

(5) Discutere in generale le traiettorie al variare dei dati iniziali, nel caso in cui sia $m\omega^2 > 3k$. In particolare determinare i dati iniziali che danno luogo a traiettorie periodiche.