Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Recupero della I Prova d'esonero 06-02-99

CORREZIONE

---

(1) Scrivendo

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 2x\left(x^2-1\right) = \partial H/\partial y, \\ \dot{y} = 2y\left(3x^2-1\right) = -\partial H/\partial x. \end{cases}$$

si ottiene dall'integrazione (in y) della prima equazione e dall'integrazione (in x) della seconda

$$H(x,y) = y^2 - 2yx\left(x^2-1\right) + F_1(x), \qquad H(x,y) = -2y\left(x^3-x\right) + F_2(y),$$

dove $F_1(x)$ e $F_2(y)$ sono funzioni che appaiono come costanti d'integrazione, così che

$$H(x,y) = y^2 - 2yx\left(x^2-1\right) + C,$$

per qualche costante C. Si può scegliere $C=0$ in modo tale che

$$H(x,y) = y^2 - 2yx\left(x^2-1\right) \ .$$

---

(2) I punti critici devono soddisfare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2\left(y - f(x)\right) = 0, \\ 2y\left(3x^2-1\right) = 0, \end{cases}$$

avendo definito, qui e nel seguito,

$$f(x) = x\left(x^2-1\right) = x^3 - x \ .$$

La seconda equazione ammette soluzione o per $y=0$, che introdotta nella prima implica $f(x)=0$, *i.e.* $x=0$ oppure $x=\pm 1$, o per $x = \pm 1/\sqrt{3}$, che introdotta nella prima implica $y = \mp 2/3\sqrt{3}$ rispettivamente.

I punti critici sono quindi

$$P_1 = (0,0), \qquad P_2 = (1,0), \qquad P_3 = (-1,0),$$
$$P_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right), \qquad P_5 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right).$$

La matrice del sistema linearizzato (nell'intorno di un qualsiasi punto (x,y)) è data da

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} -2\left(3x^2-1\right) & 2 \\ 12xy & 2\left(3x^2-1\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{xy}(x,y) & H_{yy}(x,y) \\ -H_{xx}(x,y) & -H_{xy}(x,y) \end{pmatrix},$$

dove $H_{xx}(x,y) = [\partial^2 H/\partial^2 x](x,y)$, etc.

Si vede quindi che

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

così che gli autovalori di $A(0,0)$ sono $\lambda = \pm 2$: uno di essi è reale strettamente positivo, quindi P_1 è un punto d'equilibrio instabile.

Si ha inoltre

$$A(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

così che i corrispondenti autovalori sono $\lambda = \pm 4$, quindi i punti P_2 e P_3 sono anch'essi instabili.

Infine

$$A(\pm 1/\sqrt{3}, -2/3\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -8/3 & 0 \end{pmatrix},$$

così che, in entrambi i casi, gli autovalori sono $\lambda = \pm i 4/\sqrt{3}$; quindi lo studio del sistema linearizzato non permette di trarre conclusioni sulla stabilità dei punti P_4 e P_5.

Consideriamo allora la matrice hessiana

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} H_{xx}(x,y) & H_{xy}(x,y) \\ H_{xy}(x,y) & H_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12xy & -2\left(3x^2-1\right) \\ -2\left(3x^2-1\right) & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\mathcal{H}(\pm 1/\sqrt{3}, \mp 2/3\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} 8/3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

così che

$$\det \mathcal{H}(\pm 1/\sqrt{3}, \mp 2/3\sqrt{3}) > 0 \ , \qquad H_{xx}(\pm 1/\sqrt{3}, \mp 2/3\sqrt{3}) > 0 \ ,$$

quindi i punti P_4 e P_5 sono punti di minimo per $H(x,y)$.

Se allora definiamo la funzione di Lyapunov

$$W(x,y) = H(x,y) - H(P_i), \qquad i = 4,5,$$

possiamo applicare il Teorema di Lyapunov per concludere che i punti P_4, P_5 sono punti d'equilibrio stabile. Infatti si può fissare un intorno $B(P_i)$ del punto P_i, $i = 4,5$, tale che

$$\begin{cases} W(P_i) = 0, \qquad W(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in B(P_i) \setminus \{P_i\}, \\ \dot{W}(x,y) = 0, \end{cases}$$

e quindi le ipotesi del Teorema sono soddisfatte.

---

(3) Innanzitutto si ha

$$H(P_1) = H(P_2) = H(P_3) = 0, \qquad H(P_4) = H(P_5) = -4/27 \ .$$

Inoltre la curva di livello corrispondente al valore $H(x,y) = 0$ è facile da graficare ed è data dall'unione delle due curve

$$\begin{cases} y = 0 \ , \\ y = 2f(x) \ . \end{cases}$$

Si verifica facilmente che

$$\lim_{y \to \pm\infty} H(0,y) = \infty \ , \qquad \lim_{x \to \infty} H(x,x) = -\infty \ ,$$

ottenendo informazioni sul segno di $H(x,y)$ all'infinito lungo l'asse verticale e lungo le bisettrici del primo e del terzo quadrante. Ne concludiamo quindi, utilizzando la continuità di $H(x,y)$, che la curva di livello $H(x,y) = 0$ divide il piano in 6 regioni A_j, $j = 1, \dots, 6$. Nelle due regioni A_1 e A_2, contenenti, rispettivamente, i punti P_4 e P_5, e nelle due regioni A_3 e A_4, definite, rispettivamente, da

$$\begin{aligned} A_3 : & \qquad x > 1 \ , \qquad 0 < y < f(x) \ , \\ A_4 : & \qquad x < -1 \ , \qquad 0 > y > f(x) \ , \end{aligned}$$

la funzione $H(x,y)$ è negativa; nelle due regioni rimanenti A_5 e A_6 la funzione è positiva (cfr. la Figura 1).

Per quanto riguarda i versi di percorrenza delle orbite, lungo le traiettorie tali che $y=0$ si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = -x\left(x^2-1\right) \ , \\ \dot{y} = 0 \ , \end{cases}$$

e quindi $\dot{x} > 0$ per

$$\begin{cases} x > 0 \ , & |x| < 1 \ , \\ x < 0 \ , & |x| > 1 \ , \end{cases}$$

mentre lungo le traiettorie tali che $y = f(x)$, si ha

$$\dot{x} = f(x) = y \ ,$$

e quindi $\dot{x} > 0$ per $y > 0$.

All'interno di ciascuna delle due regioni A_1 e A_2 vi saranno traiettorie periodiche, percorse in senso orario.

Per continuità si ricavano l'andamento e il verso di percorrenza delle altre orbite; ved. la Figura 1.

---

(4) Le traiettorie periodiche sono state discusse al punto precedente. Possiamo individuare i dati iniziali $(\bar{x},\bar{y})$ che generano traiettorie periodiche attraverso le condizioni

$$\begin{aligned} &0 < \bar{x} < 1 \ , \qquad 0 > \bar{y} > f(\bar{x}) \ , \\ &0 > \bar{x} > -1 \ , \qquad 0 < \bar{y} < f(\bar{x}) \ , \end{aligned}$$

oppure, equivalentemente,

$$0 < |\bar{x}| < 1 \ , \qquad 0 > H(\bar{x},\bar{y})| > -\frac{8}{27}.$$

---

(5) Si osservi innazitutto che il dato iniziale $(\bar{x},\bar{y}) = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ si trova sulla curva $y = 2f(x)$; infatti

$$\bar{y} = 2\sqrt{2} = 2\bar{x}\left(\bar{x}^2-1\right) = 2\sqrt{2}\,(2-1) \ .$$

Quindi $y = 2f(x)$ lungo tutta la traiettoria; l'equazione per x diventa allora

$$\dot{x} = 2\,(2f(x) - f(x)) = 2f(x) = 2x\left(x^2-1\right) \ ,$$

da cui si ottiene

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2x\,(x^2-1)} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)\right] \ ,$$

che, integrata, dà

$$\begin{aligned} t = \int_0^t dt' &= \int_{\sqrt{2}}^{x(t)} \frac{dx}{2x\,(x^2-1)} \\ &= \frac{1}{2}\left[-\log|x| + \frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{2}\log|x-1|\right]\Bigg|_{\sqrt{2}}^{x(t)} \\ &= \frac{1}{4}\left[\log\frac{x^2(t)-1}{x^2(t)} - \log\frac{1}{2}\right] \\ &= \frac{1}{4}\log\frac{x^2(t)-1}{x^2(t)} + \frac{1}{4}\log 2 \ . \end{aligned}$$

Quindi si ottiene

$$x(t) = \sqrt{\frac{2}{2 - e^{4t}}} \; ;$$

si verifica immediatamente che $x(0) = \sqrt{2}$, come deve essere. Inoltre si ha

$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = 1 \; , \qquad \lim_{t \to t_0} x(t) = \infty \; ,$$

dove

$$t_0 = \frac{1}{4} \log 2 \; .$$

Poiché $y = 2f(x)$, risulta

$$y(t) = 2f(x(t)) = \sqrt{\frac{2}{2 - e^{4t}}} \left(\frac{2}{2 - e^{4t}} - 1 \right)$$

e si vede che $y(0) = 2$, come deve essere, e

$$\lim_{t \to -\infty} y(t) = 0 \; , \qquad \lim_{t \to t_0} y(t) = \infty \; .$$

(6.1) Poiché $H(x, y)$ è una costante del moto, la traiettoria con dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y}) = (1/3, -8/27)$ si svolge sulla curva di livello

$$H(x, y) = H(1/3, -8/27) = -\left(\frac{8}{27} \right)^2$$

e, poiché $0 < \bar{x} = 1/3 < 1$ e $H(\bar{x}, \bar{y}) = -(8/27)^2 > -4/27$, tale traiettoria è periodica: in particolare sarà contenuta nella regione A_1 (cfr. il punto (4)).

Si ha quindi

$$y^2 - 2yf(x) - E = 0 \; , \qquad E = -\left(\frac{8}{27} \right)^2 \; ,$$

che, risolta, dà

$$y = \begin{cases} y_+(x) = f(x) + \sqrt{f^2(x) + E} \; , \\ y_-(x) = f(x) - \sqrt{f^2(x) + E} \; . \end{cases}$$

Si noti che, per $(x, y) \in A_1$,

$$f^2(x) + E = 0$$

è soddisfatta se

$$P(x) \equiv f(x) + \sqrt{|E|} = x(x^2 - 1) + \frac{8}{27} = 0 \; ,$$

se teniamo conto che, per $(x, y) \in A_1$, si ha $x \in (0, 1)$ e $f(x) < 0$. È immediato verificare che $x = 1/3$ è una radice di $P(x)$ e che, quindi,

$$P(x) = \left(x - \frac{1}{3} \right) \left(x^2 + \frac{x}{3} - \frac{8}{9} \right) \equiv \left(x - \frac{1}{3} \right) Q(x) \; ;$$

le altre due radici di $Q(x)$ si trovano facilmente e risultano essere

$$x_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{6} \; ,$$

di cui solo x_+ è compresa nell'intervallo $(0, 1)$.

In conclusione l'orbita su cui si svolge il moto è costituita dai due archi di curva $y = y_+(x)$ e $y = y_-(x)$, che si raccordano nei due punti x_1 e x_2 compresi nell'intervallo $(0, 1)$ tali che

$$y_-(x_1) = y_+(x_1) \ , \qquad y_-(x_2) = y_+(x_2) \ .$$

L'analisi sopra dà quindi

$$x_1 = \frac{1}{3} \ , \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{33}}{6} \ ,$$

se tenimao conto che le radici di $P(x)$ sono proprio i valori in cui $y_-(x)$ e $y_+(x)$ coincidono.

Possiamo allora scrivere il periodo come somma dei tempi di percorrenza dei due archi di curva

$$x \in [x_1, x_2] \to y_+(x) \ , \qquad x \in [x_1, x_2] \to y_+(-) \ ,$$

dove dobbiamo tener conto del verso di percorrenza dei due archi: da sinistra a destra lungo $y_+(x)$ e da destra a sinistra lungo $y_-(x)$ (cfr. la Figura 2).

Poiché

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\,(y_+(x) - f(x)) = \sqrt{f^2(x) + E} \ , & \text{lungo } (x, y_+(x)) \ , \\ \dot{x} = 2\,(y_-(x) - f(x)) = -\sqrt{f^2(x) + E} \ , & \text{lungo } (x, y_-(x)) \ , \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned} T &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{f^2(x) + E}} - \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{f^2(x) + E}} \\ &= 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{f^2(x) + E}} \ , \end{aligned}$$

che rappresenta il periodo della traiettoria considerata.

Tenendo conto dei valori delle costanti x_1, x_2 e E, si ha

$$T = 2 \int_{1/3}^{(\sqrt{33}-1)/6} \frac{dx}{\sqrt{x^2\,(x^2-1)^2 - (8/27)^2}} \ ,$$

che dunque esprime il periodo della traiettoria con dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y}) = (1/3, -8/27)$ come integrale definito.

(6.2) Se si aggiunge un campo vettoriale $(-\alpha x, -\alpha y)$, con $\alpha > 0$, allora il sistema dinamico è modificato in

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 2x\left(x^2 - 1\right) - \alpha x, \\ \dot{y} = 2y\left(3x^2 - 1\right) - ay, \end{cases}$$

così che la matrice del sistema linearizzato corrispondente in un intorno dell'origine è data da

$$A(0,0) = \begin{pmatrix} 2-\alpha & 2 \\ 0 & -2-\alpha \end{pmatrix} \ ;$$

gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico

$$\det\left(A(0,0) - \lambda \mathbb{1}\right) = (\lambda + \alpha - 2)\,(\lambda + \alpha + 2) \ ,$$

e quindi $\lambda_\pm = -\alpha \pm 2$, così che se $\alpha \geq 2$ risulta sempre $\lambda_+, \lambda_- < 0$. In conclusione i due autovalori saranno entrambi (strettamente) negativi per $\alpha > 2$, e, in corrispondenza, l'origine sarà asintoticamente stabile.

Inoltre, se definiamo

$$W(x,y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

risulta

$$\dot{W} = 2xy - 2x^2\left(x^2-1\right) + 2y^2\left(3x^2-1\right) - \alpha\left(x^2+y^2\right) \ .$$

Se teniamo conto che per $x^2+y^2 \le 1$, risulta

$$\begin{aligned} 2xy &\le x^2+y^2 \ , \\ -2x^2\left(x^2-1\right) &\le 2x^2\left(1-x^2\right) \le 2\left(x^2+y^2\right)\left(1-x^2\right) \le 2\left(x^2+y^2\right) \ , \\ 2y^2\left(3x^2-1\right) &\le 2\left(x^2+y^2\right)\max\{3x^2-1, 1-3x^2\} \le 2\left(x^2+y^2\right)(3-1) \le 4\left(x^2+y^2\right) \ , \end{aligned}$$

si ha, sempre per $x^2+y^2 \le 1$,

$$\begin{cases} W(0,0)=0, \qquad W(x,y)>0, \quad \forall (x,y) \neq (0,0), \\ \dot{W} = 2xy - 2x^2\left(x^2-1\right) + 2y^2\left(3x^2-1\right) - \alpha\left(x^2+y^2\right) \le (6-\alpha)\left(x^2+y^2\right) \le -\varepsilon\left(x^2+y^2\right), \end{cases}$$

con $\varepsilon = \alpha - 6$, purché $\alpha > 6$ (e quindi $\varepsilon \equiv \alpha - 6 > 0$).

Poiché $\dot{W}(0,0) = 0$ e $\dot{W}(x,y) < 0$ per ogni $(x,y) \in C \setminus \{(0,0)\}$ per $\alpha > 6$, la regione

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \le 1\}$$

è positivamente invariante. Possiamo dunque applicare il Teorema di Lyapunov per concludere che, per $\alpha > 6$, il punto $(0,0)$ è asintoticamente stabile e la regione C è contenuta nel bacino d'attrazione di $(0,0)$.

In conclusione il valore α_0 tale che per $\alpha > \alpha_0$ l'origine è asintoticamente stabile e la regione C è contenuta nel suo bacino d'attrazione è dato da $\alpha_0 = \max\{2,6\} = 6$.

(6.3) Si ha, per la traiettoria $t \to (x(t), y(t))$ con dati iniziali $(\bar{x}, \bar{y}) = (0,2)$,

$$H(x(t), y(t)) = H(\bar{x}, \bar{y}) = 4 \ ,$$

così che

$$y^2 - 2f(x) = 4 \ ,$$

per ogni (x,y) lungo l'orbita su cui la traiettoria si muove. Risolvendo esplicitamente l'equazione sopra per y, si trova

$$y = f(x) \pm \sqrt{f^2(x)+4} \ ,$$

di cui solo la determinazione con il segno positivo va presa, perché unica consistente con il dato iniziale (la determinazione con il segno negativo corrisponde a una traiettoria che attraversa l'asse y in $y=-2$, quindi che è contenuta nella regione A_6).

Dal grafico delle curve di livello si conclude che lungo tale orbita $x(t)$ tende all'infinito. Per rispondere alla domanda occorre dunque verificare se questo avviene in un tempo finito o infinito.

Tenendo conto che

$$\dot{x} = 2\left(y(x) - f(x)\right) = 2\sqrt{f^2(x)+4} = 2\sqrt{x^2(x^2-1)^2+4} \ ,$$

si ha

$$t = \int_{\bar{x}}^{x(t)} \frac{dx}{\dot{x}} = \int_0^{x(t)} \frac{dx}{2\sqrt{x^2(x^2-1)^2+4}} \equiv \int_0^{x(t)} dx\, F(x) \ ,$$

ed è immediato verificare che l'integrale converge. Infatti l'integrando è regolare (si ha $F(x) \ge F(0) = 1/4$) e per $x \to \infty$ risulta $F(x) \sim 1/x^2$, così che $F(x)$ è integrabile. Ne segue che

$$T = \int_0^{\infty} dx\, F(x) \ ,$$

è il tempo (finito) necessario perché la traiettoria con dato iniziale $(0,2)$ diverga.