Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

PROVA D'ESAME 23-01-01

CORREZIONE

ESERCIZIO 1.

(1.1) Proviamo a scrivere il sistema nella forma

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \frac{2y}{1+x^4} = \frac{\partial H}{\partial y}, \\
\dot{y} &= \frac{4x^3\left(1+y^2\right)}{\left(1+x^4\right)^2} = -\frac{\partial H}{\partial x},
\end{aligned}
$$

e vediamo se esiste una funzione $H = H(x,y)$ per la quale tali relazioni siano soddisfatte. Se tale funzione esiste, essa è per costruzione una costante del moto: infatti risulta

$$
\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} = 0.
$$

Integrando la prima equazione rispetto a y si ottiene

$$
H(x,y) = \frac{y^2}{1+x^4} + c_1(x),
$$

per qualche funzione $c_1(x)$ (indipendente da y).

Analogamente integrando la seconda equazione (cambiata di segno) rispetto a x e tenendo conto che

$$
\int \mathrm{d}x\, \frac{4x^3}{\left(1+x^4\right)^2} = \int \mathrm{d}x^4\, \frac{1}{\left(1+x^4\right)^2} = \int \mathrm{d}\left(1+x^4\right) \frac{1}{\left(1+x^4\right)^2} = -\frac{1}{1+x^4},
$$

si ottiene

$$
H(x,y) = \frac{1+y^2}{1+x^4} + c_2(y),
$$

dove la funzione $c_2(y)$ è indipendente da y.

Imponendo che le due espressioni per $H(x,y)$ siano uguali si ottiene quindi

$$
H(x,y) = \frac{1+y^2}{1+x^4} + c,
$$

per qualche costante c, e imponendo che si abbia $H(0,0) = 1$ si ottiene $c = 0$, *i.e.*

$$
H(x,y) = \frac{1+y^2}{1+x^4}.
$$

(1.2) Le curve di livello della funzione $H(x,y)$ sono le curve

$$
\Gamma_E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ H(x,y) = E \right\};
$$

ovviamente si ha $H(x,y) = E$ se

$$y^2 + 1 = E\left(1 + x^4\right),$$

quindi

$$\Gamma_E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = y_\pm(x)\right\},$$

dove

$$y_\pm(x) = \pm\sqrt{E\,(1+x^4) - 1} = \pm\sqrt{(E-1) + Ex^4}.$$

Fissato un valore $E \in \mathbb{R}$ sono possibili solo i valori x tali che risulti

$$(E-1) + Ex^4 \geq 0.$$

Poiché $x^4 \geq 0$, non sono possibili valori $E \leq 0$.

Se $0 < E < 1$ allora $E - 1 < 0$ e quindi deve essere

$$x^4 \geq \frac{1-E}{E}, \qquad \text{quindi} \qquad |x| \geq x_0 \equiv \left(\frac{1-E}{E}\right)^{1/4}.$$

Se $E \geq 1$ invece si ha $E - 1 \geq 0$ e quindi x può assumere ogni valore.

In particolare se $E = 1$ si ottiene

$$y_\pm(x) = \sqrt{x^4} = x^2,$$

così che possiamo concludere che la curva di livello Γ_1 consiste nell'unione delle due parabole $\mathcal{C}_\pm$, dove

$$\mathcal{C}_\pm = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = \pm x^2\right\}.$$

Per studiare le altre curve di livello si tenga conto che esse dipendono solo da x^2 e y^2. Basta quindi studiare $x > 0$ e $y = y_+(x)$, e le parti restanti delle curve di livello si ottengono per simmetria.

In generale, per ogni $E > 0$, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y_+}{\mathrm{d}x} &= \frac{2Ex^3}{\sqrt{(E-1) + Ex^4}}, \\
\frac{\mathrm{d}^2 y_+}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{4Ex^2}{\left[(E-1) + Ex^4\right]^{3/2}}\left[3E - 3 + Ex^4\right],
\end{aligned}$$

così che si vede che $\mathrm{d}y_+/\mathrm{d}x \geq 0$ per ogni $x \geq 0$ (ed è nulla se e solo se $x = 0$), mentre, per quanto riguarda la derivata seconda, se $E > 1$ si ha $\mathrm{d}y_+/\mathrm{d}x \geq 0$ per ogni $x \geq 0$, mentre, se $E < 1$, esiste un valore x_1 tale che

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_+}{\mathrm{d}x^2} \begin{cases} > 0, & \text{se } x > x_1, \\ < 0, & \text{se } x < x_1; \end{cases}$$

si trova facilmente che si ha

$$x_1 = \left(3\frac{1-E}{E}\right)^{1/4} > x_0.$$

Il punto x_1 costituisce dunque un punto di flesso per la funzione $y = y_+(x)$.

In conclusione, nel semipiano superiore, la situazione è la seguente. Per $E > 1$ le curve di livello Γ_E sono definite per ogni $x \in \mathbb{R}$, sono crescenti per $x > 0$ e decrescenti per $x < 0$, e sono convesse per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per $0 < E < 1$ le curve di livello Γ_E sono definite solo per $|x| \geq x_0$, sono crescenti per $x \geq x_0$ e decrecenti per $x \leq -x_0$, sono concave per $x_0 \leq |x| < x_1$ e convesse per $|x| > x_1$.

Nel semipiano inferiore le curve di livello si ottengono semplicemente per riflessione rispetto all'asse x.

Per quanto riguarda i versi di percorrenza, si tenga conto che $\dot{x} > 0$ se e solo se $y > 0$: quindi ci si muove verso destra nel semipiano superiore e verso sinistra nel semipiano inferiore.

La situazione è come rappresentata in Fig. 1.

(1.3) I punti d'equilibrio sono i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in cui si annulla il campo vettoriale. Si vede immediatamente che si ha $\dot{x} = 0$ se e solo se $y = 0$ e $\dot{y} = 0$ se e solo se $x = 0$. Esiste quindi un solo punto d'equilibrio, dato dall'origine $(0, 0)$.

(1.4) Lo studio del sistema linearizzato non dà informazioni; infatti la matrice del sistema linearizzato è data da da

$$
\begin{aligned}
A(x,y) &= \begin{pmatrix} [\partial^2 H/\partial x \partial y](x,y) & [\partial^2 H/\partial y^2](x,y) \\ -[\partial^2 H/\partial x^2](x,y) & -[\partial^2 H/\partial x \partial y](x,y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(8x^3 y)/(1+x^4)^2 & 2/(1+x^4) \\ 4x^2(3-5x^4)(1+y^2)/(1+x^4)^3 & (8x^3 y)/(1+x^4)^2 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

così che si ha

$$
A(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

D'altra parte lo studio delle curve di livello mostra che l'origine è un punto d'equilibrio instabile. Infatti comunque si scelga un intorno dell'origine esso conterrà dati iniziali di traiettorie che si allontanano indefinitivamente dall'origine.

(1.5) Di nuovo il fatto che non esistono traiettorie periodiche discende dallo studio delle curve di livello: infatti nessuna curva di livello contiene componenti chiuse, perciò non sono possibili traiettorie periodiche.

ESERCIZIO 2.

(2.1) Il sistema K sta semplicemente ruotando con velocità angolare costante ω rispetto all'asse ζ, che coincide con l'asse z del sistema fisso κ.

Se $\theta(t)$ indica l'angolo di rotazione di κ rispetto a K, si ha quindi $\theta(t) = \omega t$ (tenendo conto che $\theta(0) = 0$).

Quindi si ha $D = CB$, dove $C = \mathbb{1}$ (non c'è traslazione poiché O' coincide con O), e

$$
B = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \theta(t) = \omega t.
$$

(2.2) Scriviamo $\mathbf{q} = (x, y, z)$ e $\mathbf{Q} = (\xi, \eta, \zeta)$. Nel sistema K le coordinate η, ζ sono identicamente nulle, così che $\mathbf{Q} = (\xi, 0, 0)$; la componente ξ si ottiene risolvendo l'equazione del moto nel sistema di riferimento mobile K.

In tale sistema di riferimento la forza è data da

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_{\mathrm{TOT}} &= \mathbf{F} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3, \\
\mathbf{F} &= B\mathbf{f}, \\
\mathbf{F}_1 &= -[\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \mathbf{Q}], \\
\mathbf{F}_2 &= -2[\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{Q}}], \\
\mathbf{F}_2 &= -[\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}]],
\end{aligned}
$$

dove $\boldsymbol{\Omega} = B(0,0,\omega) = (0,0,\omega)$ è il vettore di rotazione visto come vettore di K.

Il termine $\mathbf{F}$ esprime la forza effettivamente agente sul punto materiale P, vista come vettore di K. Si vede immediatamente che, poiché $\mathbf{f} = (-\lambda^2 x, -\lambda^2 y, 0)$, si ha

$$
\mathbf{F} = (-\lambda^2 \xi, 0, 0).
$$

Poiché ω è costante si ha $\mathbf{F}_1 = 0$.

Inoltre si ottiene immediatamente, per calcolo esplicito,

$$\mathbf{F}_2 = (0, -2\omega\dot{\xi}, 0),$$

che spinge solo nella direzione η: quindi non ha componente lungo la direzione ξ.

Analogamente si trova

$$\mathbf{F}_3 = (\omega^2\xi, 0, 0),$$

che quindi ha solo la componente lungo la direzione ξ.

La situazione è rappresentata in Fig. 2.

In conclusione la prima componente del vettore $\mathbf{F}_{\mathrm{TOT}}$ (*i.e.* la componente di $\mathbf{F}_{\mathrm{TOT}}$ nella direzione ξ) è data da

$$(\mathbf{F}_{\mathrm{TOT}})_\xi = (\alpha\xi, 0, 0)\,, \qquad \alpha = \omega^2 - \lambda^2.$$

(2.3) Dalla precedente discussione si trova che $\xi = \xi(t)$ deve verificare l'equazione differenziale

$$\ddot{\xi} = \alpha\xi, \qquad \alpha = \omega^2 - \lambda^2.$$

Se $\alpha < 0$ si avrà quindi

$$\xi(t) = a\cos\sqrt{-\alpha}t + b\sin\sqrt{-\alpha}t,$$

dove a, b si ottengono tenendo conto dei dati inziali; se ξ_0 indica il valore della componente $\xi(t)$ all'istante iniziale $t = 0$, si ha quindi $\xi(0) = \xi_0$ e $\dot{\xi}(0) = 0$ (per ipotesi), da cui si ricava

$$\xi(t) = \xi_0\cos\sqrt{-\alpha}t.$$

Se $\alpha > 0$ si avrà invece

$$\xi(t) = ae^{\sqrt{\alpha}t} + be^{-\sqrt{\alpha}t},$$

dove a, b si ottengono tenendo conto dei dati inziali; con le stesse notazioni di prima si ricava

$$\xi(t) = \xi_0\cosh\sqrt{\alpha}t, \qquad \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

Se infine $\alpha = 0$ si ottiene subito

$$\xi(t) = \xi_0 \qquad \forall t,$$

sempre tenendo conto delle condizioni iniziali.

In conclusione abbiamo

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{cases} \xi(t) = \xi_0\cos\sqrt{-\alpha}t, \\ \eta(t) = 0, \\ \zeta(t) = 0, \end{cases}$$

se $\alpha = \omega^2 - \lambda^2 > 0$,

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{cases} \xi(t) = \xi_0\cosh\sqrt{\alpha}t, \\ \eta(t) = 0, \\ \zeta(t) = 0, \end{cases}$$

se $\alpha < 0$, e

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{cases} \xi(t) = \xi_0, \\ \eta(t) = 0, \\ \zeta(t) = 0, \end{cases}$$

se $\alpha = 0$.

(2.4) Dalla precedente discussione si trova che il punto materiale rimane fermo in K se K ruota con velocità angolare $\omega = \lambda$, così che $\alpha = 0$.

(2.5) Nel sistema di riferimento κ le coordinate del punto materiale P sono date da

$$\mathbf{q}(t) = B\mathbf{Q}(t) = \begin{cases} x(t) = \xi(t)\cos\theta(t), \\ y(t) = \xi(t)\sin\theta(t), \\ z(t) = 0. \end{cases}$$

Il moto sarà periodico se esiste $T > 0$ tale che $\mathbf{q}(T) = \mathbf{q}(0)$.

Questo in particolare è possibile solo se $\|\mathbf{q}(T)\| = \|\mathbf{q}(0)\|$. Si ha, tenendo conto che B è una rotazione,

$$\|\mathbf{q}(t)\| = \|B\mathbf{Q}(t)\| = \|\mathbf{Q}(t)\| = |\xi(t)|.$$

Se $\alpha > 0$ si ha che $\xi(t)$ è una funzione crescente, e tende all'infinito per $t \to \infty$, quindi anche $\|\mathbf{q}(t)\|$ cresce nel tempo: quindi se $\alpha > 0$ non sono possibili moti periodici.

Se $\alpha = 0$ allora $\xi(t) = \xi(0) \equiv \xi_0$, e il punto materiale P semplicemente ruota nel piano (x, y) con velocità angolare costante $\omega = \lambda$, descrivendo una circonferenza: quindi il moto corrispondente è periodico.

Se $\alpha < 0$, la funzione $\xi(t)$ oscilla intorno a $\xi = 0$: il moto di $\xi(t)$ è quindi un moto armonico con periodo τ, dove $\tau = 2\pi/\sqrt{-\alpha}$ è il più piccolo istante positivo tale che $\xi(\tau) = \xi(0)$. Il moto nel sistema di riferimento κ sarà quindi periodico se e solo se esistono due interi M, N tali che

$$\theta(M\tau) = 2\pi N;$$

infatti se tale condizione è verificata al tempo $t = M\tau$ si avrà $\xi(M\tau) = \xi(0)$ e $\theta(M\tau) = 0 \mod 2\pi$, quindi al tempo $t = M\tau$ il punto materiale è tornato alla sua posizione iniziale.

Poiché $\theta(t) = \omega t$, la condizione sopra si legge

$$\omega M\tau = \omega M \frac{2\pi}{\sqrt{-\alpha}} = 2\pi N,$$

da cui si ottiene

$$\frac{\omega}{\sqrt{-\alpha}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\lambda^2 - \omega^2}} = \frac{N}{M};$$

quindi, in conclusione, se $\alpha < 0$ il moto è periodico se e solo se $\lambda > \omega$ e la quantità $\sqrt{\omega^2/(\lambda^2 - \omega^2)}$ è razionale.