Corso di laurea in Matematica

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Prova d'esonero del'08-11-00

CORREZIONE

Esercizio.

(1) Derivando si ottiene

$$\begin{aligned} H_x = \frac{\partial H}{\partial x} &= 2x\left(y - x^4 + x^2\right) + \left(2x - 4x^3\right)\left(y + x^2 - 1\right) \\ &= 2x\left[y - x^4 + x^2 + \left(1 - 2x^2\right)\left(y + x^2 - 1\right)\right] \\ &= 2x\left(y - x^4 + x^2 + y + x^2 - 1 - 2x^2 y - 2x^4 + 2x^2\right) \\ &= 2x\left(2y - 3x^4 + 4x^2 - 2x^2 y - 1\right), \\ H_y = \frac{\partial H}{\partial y} &= y - x^4 + x^2 + y + x^2 - 1 = 2y - x^4 + 2x^2 - 1, \end{aligned}$$

quindi si ha

$$H_x = -\dot{y}, \qquad H_y = \dot{x},$$

che implica

$$\dot{H} = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = H_x \dot{x} + H_y \dot{y} = -\dot{y}\dot{x} + \dot{x}\dot{y} = 0.$$

---

(2) I punti critici devono soddisfare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2x\left(2y - 3x^4 + 4x^2 - 2x^2 y - 1\right) = 0, \\ 2y - x^4 + 2x^2 - 1 = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

La prima implica $x = 0$, oppure

$$2y\left(1 - x^2\right) = 3x^4 - 4x^2 + 1.$$

Si noti che $3x^4 - 4x^2 + 1 = (3x^2 - 1)(x^2 - 1)$, quindi la relazione sopra è soddisfatta identicamente per $x = \pm 1$, indipendentemente dal valore di y, mentre se $x \neq \pm 1$ si deve avere $2y = 1 - 3x^2$: quindi il caso $x = \pm 1$ va discusso a parte.

La relazione $x = 0$, inserita nella seconda equazione in $(*)$, richiede $2y - 1 = 0$, *i.e.* $y = 1/2$.

Se $2y = 1 - 3x^2$, con $x \neq \pm 1$, la seconda equazione in $(*)$ dà

$$1 - 3x^2 - x^4 + 2x^2 - 1 = 0,$$

che si può riscrivere

$$x^4 - x^2 = x^2\left(x^2 - 1\right) = 0.$$

che è soddisfatta per $x = 0$ (poiché stiamo supponendo $x^2 - 1 \neq 0$); il corrispondente valore di y è, per la $(*)$, $y = 1/2$, che dà il punto d'equilibrio trovato precedentemente.

Se $x = \pm 1$ la seconda equazione in $(*)$ dà $2y = 0$, *i.e.* $y = 0$.

Alternativamente la seconda equazione in $(*)$, dà

$$2y = x^4 - 2x^2 + 1,$$

che, inserita nella prima equazione, implica

$$\begin{aligned}
2x\left(x^4 - 2x^2 + 1 - 3x^4 + 4x^2 - x^2\left(x^4 - 2x^2 + 1\right) - 1\right) \\
2x\left(x^4 - 2x^2 + 1 - 3x^4 + 4x^2 - x^6 + 2x^4 - x^2 - 1\right) \\
2x\left(-x^6 + x^2\right) = 2x^3\left(1 - x^4\right),
\end{aligned}$$

e quindi si trova $x = 0$ oppure $x = \pm 1$ (a cui corrispondono i valori $y = 1/2$ e $y = 0$, rispettivamente).

In conclusione i punti d'equilibrio sono tre:

$$P_0 = \left(0, \frac{1}{2}\right), \qquad P_1 = (1, 0), \qquad P_2 = (-1, 0).$$

---

(3) *Prima parte.* La matrice del sistema linearizzato (nell'intorno di un qualsiasi punto (x, y)) è data da

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} H_{xy}(x,y) & H_{yy}(x,y) \\ -H_{xx}(x,y) & -H_{xy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - x^3 & 2 \\ -4y + 30x^4 - 24x^2 + 12x^2y + 2 & -4x + 4x^3 \end{pmatrix},$$

dove $H_{xx}(x,y) = [\partial^2 H/\partial^2 x](x,y)$, etc.

Si vede quindi che

$$A\left(0, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

così che i corrispondenti autovalori sono $\lambda = 0$: non possiamo quindi concludere nulla sulla stabilità di tale punto d'equilibrio.

Si ha inoltre

$$A(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix},$$

così che i corrispondenti autovalori sono $\lambda = \pm 4$, quindi i punti P_1 e P_2 sono punti d'equilibrio instabile.

Consideriamo allora la matrice hessiana

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} H_{xx}(x,y) & H_{xy}(x,y) \\ H_{xy}(x,y) & H_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y - 30x^4 + 24x^2 - 12x^2y - 2 & 4x - 4x^3 \\ 4x - 4x^3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\mathcal{H}\left(0, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

così che non possiamo concludere se P_0 è un punto di massimo o di minimo per la funzione $H(x,y)$.

Vedremo tra un momento che è possibile tuttavia dare una risposta semplice a tale domanda.

---

(4) La curva di livello

$$\Gamma_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ H(x,y) = 0\right\}$$

è costituita dalle due curve

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = 1 - x^2\right\}, \\
\mathcal{C}_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = x^4 - x^2\right\},
\end{aligned}$$

che si intersecano in corrispondenza dei due punti d'equilibrio P_1 e P_2.

La curva $\mathcal{C}_1$ è una parabola con vertice nel punto $(0,1)$ e concavità rivolta verso il basso, che interseca l'asse x nei punti P_1 e P_2.

La curva $\mathcal{C}_2$ si studia come segue. Ponendo $y = f(x) = x^4 - x^2$ si ha

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = 4x^3 - 2x = 2x\left(2x^2 - 1\right),$$

che si annulla per $x = 0$ e per $x = \pm 1/\sqrt{2}$. In corrispondenza di tali valori la derivata seconda

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) 12x^2 - 2 = 2\left(6x^2 - 1\right)$$

assume i valori $f''(0) = -2$ e $f''(\pm 1/\sqrt{2}) = 4$: quindi $x = 0$ è un punto di massimo relativo, mentre $x = \pm 1/\sqrt{2}$ sono punti di minimo relativo. Inoltre

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty,$$

e $f(x) = f(-x)$: quindi la curva $\mathcal{C}_2$ è come rappresentata nella Figura 1.

Per studiare il verso di percorrenza delle orbite contenute in Γ_0, procediamo come segue.

Consideriamo prima moti sulla parabola $\mathcal{C}_1$. Fissando $y = 1 - x^2$, otteniamo, per l'equazione per x,

$$\dot{x} = 2 - 2x^2 + 2x^2 - x^4 - 1 = 1 - x^4,$$

quindi $\dot{x} > 0$ se $|x^2| < 1$, e $\dot{x} < 0$ per $|x^2| > 1$.

Consideriamo quindi moti lungo la curva $\mathcal{C}_2$. Fissando $y = x^4 - x^2$, otteniamo

$$\dot{x} = 2x^4 - 2x^2 + 2x^2 - x^4 - 1 = x^4 - 1,$$

quindi $\dot{x} > 0$ se $|x^2| > 1$, e $\dot{x} < 0$ per $|x^2| < 1$.

La situazione è rappresentata nella Figura 1.

---

(3) *Seconda parte.* Studiamo il segno della funzione H. Si ha

$$H\left(0, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} < 0,$$

e

$$\lim_{x \to \infty} H(x, 0) = -\infty,$$

quindi, per continuità, la funzione $H(x,y)$ è negativa nelle tre regioni A_1, A_2 e A_3 definite da

$$A_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < -1, \quad 1 - x^2 < y < x^4 - x^2 \right\},$$
$$A_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 < x < 1, \quad x^4 - x^2 < y < 1 - x^2 \right\},$$
$$A_3 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 1, \quad 1 - x^2 < y < x^4 - x^2 \right\};$$

da questo segue in particolare che P_0 è un punto di minimo relativo per la funzione $H(x,y)$.

Infatti la funzione $H(x,y)$ avrà, per il teorema di Weierstrass, nella regione chiusa $\overline{A_2}$ punti di massimo e di minimo: tali punti saranno o sulla frontiera $\partial A_2 = \overline{A_2} \setminus A_2$ o in corrispondenza dei punti stazionari interni. Sulla frontiera si ha $H(x,y) = 0$, mentre l'unico punto stazionario interno è P_0. Quindi la frontiera è costituita da punti di massimo per $H|\overline{A_2}$ (restrizione di H ad $\overline{A_2}$), mentre P_0 costituisce un punto di minimo relativo (isolato).

Possiamo alliora applicare il teorema di Ljapunov. Scegliendo un intorno $B(P_0)$ del punto P_0 e la funzione di Ljapunov

$$W(x,y) = H(x,y) - H(P_0) = H(x,y) + \frac{1}{4},$$

avremo:
(1) $W(P_0) = 0$, e $W(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \in B(P_0) \setminus \{P_0\}$,
(2) $\dot{W}(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \in B(P_0)$.
Quindi P_0 è un punto d'equilibrio stabile.

---

(5) Per continuità si ricavano l'andamento e il verso di percorrenza delle altre orbite. Le orbite racchiuse nella regione A_2 sono chiuse: infatti tale regione è racchiusa all'interno di una componente connessa di una curva di livello e contiene al suo interno un punto d'equlibrio stabile. Quindi tutti i dati iniziali in $A_2 \setminus \{P_0\}$ dànno luogo a traiettorie che si svolgono su orbite chiuse che contengono il punto P_0 al loro interno. Ved. la Figura 2.

---

(6) Le traiettorie periodiche sono quelle che partono dai dati iniziali contenuti nella regione $A_2 \setminus \{P_0\}$, che possiamo anche caratterizzare come

$$A_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 < x < 1, -\frac{1}{4} < H(x,y) < 0 \right\}.$$

---

(7) Si osservi innazitutto che il dato iniziale $(\bar{x},\bar{y}) = (0,(2+\sqrt{3})/4)$ si trova nella regione A_2. Infatti si ha

$x \in (-1,1)$ e

$$H\left(0, \frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4} - 1\right)\frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{-2+\sqrt{3}}{4}\frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{3-4}{16} = -\frac{1}{16} \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right).$$

---

(8) Poiché $H(x,y)$ è una costante del moto, la traiettoria con dati iniziali $(\bar{x},\bar{y}) = (0,(2+\sqrt{3})/4)$ si svolge sulla curva di livello

$$H(x,y) = -\frac{1}{16},$$

quindi y è legata a x dalla relazione

$$\begin{aligned} y^2 - y\left(x^4 - 2x^2 + 1\right) + \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - x^4\right) + \frac{1}{16} \\ = y^2 - y\left(x^2-1\right)^2 - x^2\left(x^2-1\right)^2 + \frac{1}{16} = 0, \end{aligned}$$

che ammette soluzione

$$\begin{aligned} y = y_\pm(x) &= \frac{1}{2}\left[\left(x^2-1\right)^2 \pm \sqrt{\left(x^2-1\right)^4 + 4x^2\left(x^2-1\right)^2 - \frac{1}{4}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(x^2-1\right)^2 \pm \sqrt{\left(x^2-1\right)^2\left((x^2-1)^2 + 4x^2\right) - \frac{1}{4}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(x^2-1\right)^2 \pm \sqrt{\left(x^2-1\right)^2\left(x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2\right) - \frac{1}{4}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(x^2-1\right)^2 \pm \sqrt{\left(x^2-1\right)^2\left(x^4 + 2x^2 + 1\right) - \frac{1}{4}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(x^2-1\right)^2 \pm \sqrt{\left(x^2-1\right)^2\left(x^2+1\right)^2 - \frac{1}{4}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(x^2-1\right)^2 \pm \sqrt{\left(x^4-1\right)^2 - \frac{1}{4}}\right]. \end{aligned}$$

La corrispondente orbita è costituita da due archi γ_1 e γ_2 che si raccordano in corrispondenza di due punti x_- e x_+ tali che

$$y_-(x_\pm) = y_+(x_\pm),$$

come rappresentato nella Figura 3.

Quindi i punti $x_\pm$ sono i valori di x per cui si annulla il discriminante

$$\left(x^4-1\right)^2-\frac{1}{4},$$

i.e. sono i valori x tali che $x^4-1=\pm 1/2$. Quindi

$$x_\pm \in \left\{\pm\left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}, \quad \pm\left(\frac{3}{2}\right)^{1/4}\right\};$$

si noti che i valori negativi di x^2 vanno scartati. Anche i valori $\pm(3/2)^{1/4}$ vanno scartati perché sono esterni all'intervallo $(-1,1)$, così che possiamo concludere che is ha

$$x_\pm = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}.$$

Tenuto conto dei versi di percorrenza, partendo da x_- ci si muove lungo l'arco di curva γ_1 verso x_+, e, una volta raggiunto x_+, ci si muove lungo l'arco di curva γ_2 verso x_-. Se indichamo con T_1 e T_2 i tempi di percorrenza, rispettivamente degli archi γ_1 e γ_2, il periodo T della traiettoria considerata è quindi dato da $T=T_1+T_2$.

Per calcolare tali tempi di percorrenza, si può procedere come segue. Lungo l'arco di curva γ_1 si ha $y=y_+(x)$, quindi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y_+(x)+2x^2-x^4-1=\left(x^2-1\right)^2+\sqrt{\left(x^4-1\right)^2-\frac{1}{4}}-x^4+2x^2-1\\ &= \left(x^2-1\right)^2+\sqrt{\left(x^4-1\right)^2-\frac{1}{4}}-\left(x^2-1\right)^2\\ &= \sqrt{\left(x^4-1\right)^2-\frac{1}{4}}\equiv F(x),\end{aligned}$$

e quindi, risolvendo per separazione di variabili, si ha

$$\int_{x_-}^{x(T_1)}\frac{\mathrm{d}x}{F(x)}=\int_0^{T_1}\mathrm{d}t=T_1,$$

dove $x(T_1)=x_+$; analogamente si trova

$$\int_{x_+}^{x(T_2)}\frac{\mathrm{d}x}{F(x)}=\int_0^{T_2}\mathrm{d}t=T_2,$$

dove $x(T_2)=x_-$ se $x(0)=x_+$.

In conclusione si ottiene

$$T=T_1+T_2=2T_1=2\int_{x_-}^{x_+}\frac{\mathrm{d}x}{F(x)}=4\int_0^{(1/2)^{1/4}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x^4-1\right)^2-\frac{1}{4}}}.$$