Primo Esonero di CP2
a.a. 2001/2002

Esercizio 1 Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e sia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a.

a) Dare la definizione di $\sigma(X)$.

b) Sia $a \in \mathbb{R}$. Dimostrare che $X = a$ se e solo se $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega\}$.

c) Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq b$, e $A \in \mathcal{F}$, con $A \neq \emptyset, \Omega$. Dimostrare che $X = a\,1\!\!1_A + b\,1\!\!1_{A^c}$ se e solo se $\sigma(X) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

Esercizio 2 Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e $A_0 \in \mathcal{F}$ tale che $\mathbb{P}(A_0) > 0$. Sia

$$\mathcal{F} \ni A \mapsto \mathbb{P}_0(A) = \mathbb{P}(A \,|\, A_0) = \frac{\mathbb{P}(A \cap A_0)}{\mathbb{P}(A_0)}.$$

a) Verificare che $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_0)$ è uno spazio di probabilità e che $\mathbb{P}_0 \ll \mathbb{P}$. Scrivere $\frac{d\mathbb{P}_0}{d\mathbb{P}}$.

b) Mostrare che $\mathbb{P} \ll \mathbb{P}_0$ se e solo se $\mathbb{P}(A_0) = 1$ e scrivere in tal caso $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_0}$.

c) Fissato $p \geq 1$, mostrare che se $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ allora $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_0)$. Detta $\mathbb{E}_0$ la media rispetto a $\mathbb{P}_0$, dimostrare che esiste una costante positiva c_p tale che $\mathbb{E}_0(|X|^p) \leq c_p\,\mathbb{E}(|X|^p)$.

d) Posto invece,

$$\mathcal{F} \ni A \mapsto \mathbb{P}^0(A) = \begin{cases} \mathbb{P}(A_0 \,|\, A) & \text{se } \mathbb{P}(A) > 0 \\ 0 & \text{se } \mathbb{P}(A) = 0 \end{cases}$$

dire se $\mathbb{P}^0$ è una misura, eventualmente di probabilità, su $(\Omega, \mathcal{F})$.

Esercizio 3 Enunciare e dimostrare i due lemmi di Borel-Cantelli e verificare, con un controesempio, che il secondo lemma di Borel-Cantelli non vale in generale se si elimina l'ipotesi di indipendenza.

Esercizio 4 Sia X una v.a. con densità $p_X(x) = c\,e^{-|x|}$ e sia $Y = X^2\,1\!\!1_{|X|<a}$, con $a, c > 0$ fissate.

a) Determinare c e dire se $X \in L^2$.

b) Calcolare $\mathrm{Cov}(X, Y)$. X e Y sono indipendenti?

c) Dire se Y ha densità e scrivere la f.d. F_Y di Y.

Esercizio 1 a) Si rimanda al libro di testo. Nel seguito, useremo $\sigma(X) = \{X^{-1}(B)\,;\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

b) Se $X = a$ allora per ogni boreliano B,

$$X^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } a \notin B \\ \Omega & \text{se } a \in B \end{cases}$$

quindi $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega\}$.

Viceversa, supponiamo che $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega\}$. Se per assurdo X potesse assumere due valori a_1, a_2 diversi, allora $A_1 = X^{-1}(\{a_1\})$ e $A_2 = X^{-1}(\{a_2\})$ sarebbero due elementi di $\sigma(X)$ disgiunti e non vuoti, il che non è possibile. Quindi X assume un unico valore a.

c) Supponiamo $X = a\,1\!\!1_A + b\,1\!\!1_{A^c}$. Allora per ogni boreliano B,

$$X^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } a, b \notin B \\ A & \text{se } a \in B \text{ e } b \notin B \\ A^c & \text{se } a \notin B \text{ e } b \in B \\ \Omega & \text{se } a, b \in B \end{cases}$$

quindi $\sigma(X) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

Viceversa, sia $\sigma(X) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$. Supponiamo per assurdo che X possa assumere $n \geq 3$ valori diversi. Se a_1, a_2, a_3 denotano tre di questi valori diversi, allora $A_1 = X^{-1}(\{a_1\})$, $A_2 = X^{-1}(\{a_2\})$ e $A_3 = X^{-1}(\{a_3\})$ sono tre elementi di $\sigma(X)$ disgiunti e non vuoti, il che non è possibile. Quindi X assume o un solo valore α oppure due valori α e β distinti. Ovviamente il primo caso qui non è possibile, altrimenti da **a)** si avrebbe $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega\}$. Quindi esistono α, β diversi tali che $X = \alpha\,1\!\!1_\Gamma + \beta\,1\!\!1_{\Gamma^c}$, con $\Gamma = X^{-1}(\{\alpha\}) \in \mathcal{F}$ e $\Gamma \neq \emptyset, \Omega$. Ora, come visto sopra, in tal caso si avrebbe $\sigma(X) = \{\emptyset, \Gamma, \Gamma^c, \Omega\}$ e poiché per ipotesi $\sigma(X) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$, dev'essere $\Gamma = A$ oppure $\Gamma = A^c$, da cui la tesi.

Esercizio 2 a) Si ha: $\mathbb{P}_0$ è in effetti definita su tutto $\mathcal{F}$; $\mathbb{P}_0(\Omega) = 1$; $\mathbb{P}_0(A) \geq 0$ per ogni $A \in \mathcal{F}$; se $\{A_k\}_k \subset \mathcal{F}$ è tale che $A_{k_1} \cap A_{k_2}$ per ogni $k_1 \neq k_2$, allora

$$\mathbb{P}_0(\cup_k A_k) = \mathbb{P}(\cup_k A_k \,|\, A_0) = \frac{\mathbb{P}(\cup_k A_k \cap A_0)}{\mathbb{P}(A_0)} = \frac{\sum_k \mathbb{P}(A_k \cap A_0)}{\mathbb{P}(A_0)} = \sum_k \mathbb{P}(A_k \,|\, A_0) = \sum_k \mathbb{P}_0(A_k)$$

dunque $\mathbb{P}_0$ è una misura di probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$.

Poi, se $\mathbb{P}(A) = 0$ allora $\mathbb{P}(A \cap A_0) = 0$, quindi $\mathbb{P}_0(A) = 0$, cioè $\mathbb{P}_0 \ll \mathbb{P}$. Inoltre, per ogni $A \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}_0(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap A_0)}{\mathbb{P}(A_0)} = \frac{1}{\mathbb{P}(A_0)} \int_{A \cap A_0} d\mathbb{P} = \int_A \frac{1\!\!1_{A_0}}{\mathbb{P}(A_0)} d\mathbb{P},$$

da cui segue che $\mathbb{P}$-q.o.

$$\frac{d\mathbb{P}_0}{d\mathbb{P}}(\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(A_0)}\, 1\!\!1_{A_0}(\omega).$$

b) Supponiamo $\mathbb{P} \ll \mathbb{P}_0$. Poiché $\mathbb{P}_0(A_0^c) = 0$, dev'essere $\mathbb{P}(A_0^c) = 0$ cioè $\mathbb{P}(A_0) = 1$.

Viceversa, supponiamo che $\mathbb{P}(A_0) = 1$. Allora $\mathbb{P}(A \cap A_0) = \mathbb{P}(A)$ quindi $\mathbb{P}_0(A) = \mathbb{P}(A)$ per ogni $A \in \mathcal{F}$, e ovviamente $\mathbb{P} \ll \mathbb{P}_0$.

In particolare, $\mathbb{P} \ll \mathbb{P}_0$ se e solo se $\mathbb{P}_0 \equiv \mathbb{P}$, ma allora $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}_0} = 1$.

c) Abbiamo visto che $\mathbb{P}_0 \ll \mathbb{P}$. Allora,

$$Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_0) \qquad \text{se e solo se} \qquad Z\,\frac{d\mathbb{P}_0}{d\mathbb{P}} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

e in tal caso, $\mathbb{E}_0(Z) = \int Z\, d\mathbb{P}_0 = \int Z\, \frac{d\mathbb{P}_0}{d\mathbb{P}}\, d\mathbb{P}$. Ora, sia $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, cioè $Z = |X|^p \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Allora,

$$\left| Z\, \frac{d\mathbb{P}_0}{d\mathbb{P}} \right| = \frac{1}{\mathbb{P}(A_0)}\, |X|^p\, 1\!\!1_{A_0} \le c_p\, |X|^p$$

dove si è posto $c_p = 1/\mathbb{P}(A_0)$, quindi (per dominazione) $Z\, \frac{d\mathbb{P}_0}{d\mathbb{P}} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ciò prova che $|X|^p \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_0)$, o meglio $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_0)$, ed inoltre

$$\mathbb{E}_0(|X|^p) = c_p \int |X|^p\, 1\!\!1_{A_0}\, d\mathbb{P} \le c_p \int |X|^p\, d\mathbb{P} = c_p\, \mathbb{E}(|X|^p).$$

d) No: in generale $\mathbb{P}^0$ non è una misura, tanto meno di probabilità. Infatti, se $\mathbb{P}(A_0) = 1$, allora $\mathbb{P}^0(A) = 1$ per ogni $A \in \mathcal{F}$ tale che $\mathbb{P}(A) > 0$, quindi $\mathbb{P}^0$ non è additiva. Se invece $\mathbb{P}(A_0) < 1$ si prenda, ad esempio, $A = A_0$ e $B = A_0^c$. Allora, $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \Omega$, quindi

$$\mathbb{P}^0(A \cup B) = \mathbb{P}(A_0 \,|\, \Omega) = \mathbb{P}(A_0) < 1.$$

Inoltre, $\mathbb{P}^0(A) = \mathbb{P}^0(A_0) = 1$ e $\mathbb{P}^0(B) = \mathbb{P}^0(A_0^c) = 0$, quindi $\mathbb{P}^0(A \cup B) < \mathbb{P}^0(A) + \mathbb{P}^0(B)$, ovvero $\mathbb{P}^0$ non è una funzione additiva, dunque non è una misura.

Esercizio 3 Si rimanda al libro di testo. Per il controesempio, si consideri, ad esempio, una successione $\{A_n\}_n$ tale che $A_n = A$ per ogni n, dove A è tale che $\mathbb{P}(A) = p \in (0,1)$. Allora, $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \sum_n p = +\infty$ ma $\mathbb{P}(A_n \text{ i.o.}) = \mathbb{P}(A) < 1$. Infatti, qui gli eventi A_n ovviamente non sono indipendenti.

Esercizio 4 a) p_X è integrabile su $\mathbb{R}$: posto $f_n(x) = p(x)\, 1\!\!1_{|x|<n}$, evidentemente $0 \le f_n \uparrow p_X$ e quindi (MON) $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx \uparrow \int_{\mathbb{R}} p_X(x)dx$. Ora,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 2c \int_0^n e^{-x}dx = 2c(1 - e^{-n}) \uparrow 2c = \int_{\mathbb{R}} p_X(x)dx,$$

da cui segue che p_X è integrabile e $c = 1/2$. Perché $X \in L^2$, la funzione $x^2 p_X(x)$ dev'essere integrabile su $\mathbb{R}$. Ora, $0 \le x^2 p_X(x)\, 1\!\!1_{|x|<n} \uparrow x^2 p_X(x)$ e

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 p_X(x)\, 1\!\!1_{|x|<n} dx = 2c \int_0^n x^2 e^{-x} dx = 2c\Big(- x^2 e^{-x}\Big|_0^n - 2x e^{-x}\Big|_0^n - 2e^{-x}\Big|_0^n \Big) \uparrow 4c = 2.$$

Dunque, $X \in L^2$ e $\mathbb{E}(X^2) = 2$. In particolare, $X \in L^1$ e $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x p_X(x)dx = 0$ perché la funzione $x \mapsto x p_X(x)$ è dispari.

b) Per $X, Y \in L^2$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY)$ perché qui $\mathbb{E}(X) = 0$. Quindi, occorre dimostrare che $Y \in L^2$ e calcolare $\mathbb{E}(XY)$. Poiché $Y = X^2\, 1\!\!1_{|X|<a}$, in particolare $|Y|^2 \le a^4$, quindi (per dominazione) la sua media esiste. Inoltre,

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^3\, 1\!\!1_{|X|<a}) = \int x^3\, 1\!\!1_{|x|<a}\, p_X(x)dx = \int_{-a}^{a} x^3 p_X(x)dx = 0$$

perché $x \mapsto x^3 p_X(x)$ è dispari. Quindi $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. Ma X e Y non sono indipendenti. Ad esempio, $\mathbb{P}(X > a, Y > 0) = \mathbb{P}(X > a, X^2\, 1\!\!1_{|X|<a} > 0) = \mathbb{P}(X > a, 0 > 0) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ ma

$$\mathbb{P}(X > a)\mathbb{P}(Y > 0) = \mathbb{P}(X > a)\mathbb{P}(|X| < a) \ne 0 = \mathbb{P}(X > a, Y > 0).$$

c) Y non ha densità perché la sua legge Λ_Y non è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue. Infatti, $\mathrm{Leb}(\{0\}) = 0$ ma $\Lambda_Y(\{0\}) = \mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(|X| \ge a) = 2c \int_a^\infty e^{-x}dx > 0$.

Scriviamo la f.d. di Y: per $y \in \mathbb{R}$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(X^2\, 1\!\!1_{|X|<a} \le y)$$

quindi $F_Y(y) = 0$ per $y < 0$ ma anche $F_Y(y) = 1$ per $y > a^2$. Per $0 \le y \le a^2$ si ha:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(X^2\, 1\!\!1_{|X|<a} \le y) = \mathbb{P}(X^2 \le y, |X| < a) + \mathbb{P}(|X| > a) \\ &= 2c \int_0^{\sqrt{y}} e^{-x} dx + 2 \int_a^{\infty} e^{-x} dx = 1 - e^{-\sqrt{y}} + e^{-a}. \end{aligned}$$

Quindi,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ 1 - e^{-\sqrt{y}} + e^{-a} & \text{se } 0 \le y < a^2 \\ 1 & \text{se } y \ge a^2. \end{cases}$$

Si noti che $\Delta F_Y(0) = e^{-a} > 0$, quindi Y non può avere densità (nel qual caso F_Y sarebbe continua).