Esercizi di CP2, IX
a.a. 2001/2002

Esercizio 1 Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. tale che $X_n \to X$ in legge e sia f una funzione continua. Dimostrare che $f(X_n) \to f(X)$ in legge.

Esercizio 2 Sia X una v.a. con densità esponenziale-doppia, cioè $f_X(x) = \frac{1}{2}\, e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Detta φ_X la funzione caratteristica di X, verificare[1] che $\varphi_X(\theta) = \frac{1}{1+\theta^2}$.

b) Verificare che $\varphi_X \in L^1(\mathbb{R}, \mathrm{Leb})$ e dedurre l'espressione di f_X usando il teorema di inversione.

c) Una v.a. Y è detta di Cauchy se ha densità $f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$, $y \in \mathbb{R}$. Usando **a)** e **b)**, dimostrare che[2] $\varphi_Y(y) = e^{-|\theta|}$, $\theta \in \mathbb{R}$, essendo φ_Y la funzione caratteristica di Y.

d) Sia $\{Y_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d. di Cauchy. Dimostrare che[3] la media empirica $\bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k$ è ancora una v.a. di Cauchy. Questo risultato è in apparente contraddizione con la LGN: perché? E perché tale contraddizione è solo apparente?

Esercizio 3 *(Convergenza in L^1 delle densità $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ convergenza debole)*

a) Sia X_n una v.a. con densità di probabilità f_n, $n = 1, 2, \ldots$ e sia f tale che $f_n \to f$ in $L^1(\mathbb{R}, \mathrm{Leb})$. Dimostrare che f è una densità di probabilità e, dette X_n e X v.a. con densità f_n e f rispettivamente, $X_n \to X$ in legge.

b) Per $n = 1, 2, \ldots$, sia $F_n(x) = x - \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi}$ se $0 \le x < 1$, $F_n(x) = 0$ se $x < 0$ e $F_n(x) = 1$ se $x \ge 1$. Verificare che F_n è una funzione di distribuzione, per ogni n. Detta X_n una v.a. con f.d. F_n, verificare che X_n ha densità di probabilità f_n. Dimostrare poi che $X_n \to X$ in legge, con $X \sim \mathrm{Un}(0,1)$, ma la successione delle densità $\{f_n\}_n$ non converge in $L^1(\mathbb{R}, \mathrm{Leb})$ (né q.o.) alla densità uniforme su $(0,1)$.

Esercizio 4 Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. tali che $X_n \sim \mathrm{Un}(0, \frac{1}{n})$.

a) Studiare la convergenza in legge della successione $\{n^\gamma X_n\}_n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ (e confrontare con l'esercizio 2 dell'esercitazione VI).

b) Studiare la convergenza in legge di $\{(nX_n)^\beta\}_n$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 Sia $\{X_n\}_n$ una successione di v.a. i.i.d., uniformi nel disco $D_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x|_2 \le 1\}$ ($|\cdot|_2$ = norma euclidea). Posto $R_n = |X_n|$ e $Z_n = \min(R_1, \ldots, R_n)$, studiare la convergenza in legge di $\{\sqrt{n}\, Z_n\}_n$ (e confrontare con l'esercizio 1 dell'esercitazione VI).

---

[1] Potrebbe essere utile ricordare che se $Z \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ allora $\varphi_Z(\theta) = \int_0^\infty e^{x(i\theta - \lambda)}dx = \frac{1}{\lambda - i\theta}$.

[2] Questo esercizio consente di determinare la funzione caratteristica di una v.a. di Cauchy sfruttando una proprietà di dualità tra le leggi esponenziale-doppia e di Cauchy. La funzione caratteristica di una v.a. di Cauchy si può anche calcolare con metodi di analisi complessa. A tale scopo, si consideri la funzione $f(z) = e^{i\theta z}/(1+z^2)$, $z \in \mathbb{C}$ (si noti che f ha due poli in $\pm i$). Si integri f lungo la curva (chiusa) $\mathcal{C}_R$ di $\mathbb{C}$ delineata dal segmento (sull'asse reale) che congiunge $-R$ a R e dalla semicirconferenza di raggio R centrata nell'origine, prendendo quella superiore se $\theta > 0$ e quella inferiore se $\theta < 0$. Si calcoli $\int_{\mathcal{C}_R} f(z)dz$ usando il Teorema dei Residui e se ne consideri poi il limite per $R \to +\infty$.

[3] Potrebbe essere utile ricordare che esiste una corrispondenza biunivoca tra leggi e funzioni caratteristiche.

Esercizio 1 Poniamo $Y_n = f(X_n)$ e $Y = f(X)$. Presa $g \in \mathcal{C}_b$, allora $g \circ f$ rimane continua e limitata. Allora, poiché $X_n \to X$ in legge,

$$\mathbb{E}(g(Y_n)) = \mathbb{E}(g \circ f(X_n)) \to \mathbb{E}(g \circ f(X)) = \mathbb{E}(g(Y)),$$

quindi $Y_n \to Y$ in legge. Oppure, dal Teorema di Skorohod esiste uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dov'è possibile definire una successione di v.a. $\{Z_n\}_n$ e un'ulteriore v.a. Z tali che $Z_n \overset{\mathcal{L}}{=} X_n$ ("$\overset{\mathcal{L}}{=}$" significa "ha la stessa legge"), per ogni n, $Z \overset{\mathcal{L}}{=} X$ e $Z_n \to Z$ q.c. Essendo f continua, $f(Z_n) \to f(Z)$ q.c., quindi $f(Z_n) \to f(Z)$ in legge. Ora, poiché $f(X_n) \overset{\mathcal{L}}{=} f(Z_n)$ e $f(X) \overset{\mathcal{L}}{=} f(Z)$, si ha anche $f(X_n) \to f(X)$ in legge.

Esercizio 2 a) Si ha

$$\begin{aligned}\varphi_X(\theta) &= \frac{1}{2}\int e^{i\theta x}\, e^{-|x|}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{i\theta x}\, e^{-x}\, dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 e^{i\theta x}\, e^{x}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{x(i\theta-1)}\, dx + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{x(-i\theta-1)}\, dx\end{aligned}$$

dove nell'ultimo integrale si è effettuato il cambio di variabile $x \mapsto -x$. Se $Z \sim \mathrm{Exp}(1)$, allora $\varphi_Z(\theta) = \int_0^{+\infty} e^{x(i\theta-1)}\, dx = \frac{1}{1-i\theta}$, quindi

$$\varphi_X(\theta) = \frac{1}{2}\,\varphi_Z(\theta) + \frac{1}{2}\,\varphi_Z(-\theta) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-i\theta} + \frac{1}{1+i\theta}\Big) = \frac{1}{1+\theta^2}.$$

b) Si verifica facilmente che $\varphi_X(\theta)$ è integrabile su $\mathbb{R}$ e che

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_X(\theta)\, d\theta = \lim_{N\to+\infty} \arctan\theta\Big|_{-N}^{N} = \pi$$

(si consideri ad esempio la successione $f_N(\theta) = \varphi_X(\theta)\, 1\!\!1_{\theta\in(-N,N)}$ e si usi MON). Allora (teorema di inversione) X ha densità data da

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta x}\, \varphi_X(\theta)\, d\theta.$$

cioè

$$\frac{1}{2}\, e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\theta x}}{1+\theta^2}\, d\theta,$$

il che prova che

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\theta x}}{\pi(1+\theta^2)}\, d\theta = e^{-|x|}, \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

c) Se Y è una v.a. di Cauchy, allora

$$\varphi_Y(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta Y}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\theta x}}{\pi(1+x^2)}\, dx.$$

Ora, scambiando i ruoli a θ e x nella formula (1), si ottiene

$$\varphi_Y(\theta) = e^{-|\theta|}, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

c) Posto $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, usando le proprietà della funzione caratteristica (ricordiamo che le Y_k sono indipendenti), si ha

$$\varphi_{\bar{Y}_n}(\theta) = \varphi_{\frac{1}{n}S_n}(\theta) = \varphi_{S_n}\Big(\frac{\theta}{n}\Big) = \prod_{k=1}^n \varphi_{Y_k}\Big(\frac{\theta}{n}\Big) = \prod_{k=1}^n e^{-|\theta/n|} = e^{-n|\theta|/n} = e^{-|\theta|},$$

quindi $\bar{Y}_n$ è ancora una v.a. di Cauchy. Ma allora $\bar{Y}_n \equiv \frac{1}{n}S_n$ non converge ad una costante, come seguirebbe dalla LGN. E infatti, qui la LGN non vale e non c'è alcuna contraddizione perché qui cade la condizione che assicura la validità della LGN: una v.a. di Cauchy non ha media, come segue dal fatto che la funzione $x \mapsto x/(1+x^2) \notin L^1(\mathbb{R}, \text{Leb})$.

Esercizio 3 a) Perché f sia una densità dev'essere $f \geq 0$ q.o. e $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$. Poiché $f_n \to f$ in L^1, per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ si ha

$$\Big|\int_A f_n(x)\,dx - \int_A f(x)\,dx\Big| \leq \int_A |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|\,dx \to 0 \qquad \text{per } n \to \infty,$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx, \qquad \text{per ogni } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Poiché f_n è una densità per ogni n, $\int_A f_n(x)\,dx \geq 0$ per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 1$. Ma allora $\int_A f(x)\,dx \geq 0$ per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, da cui segue che $f \geq 0$ q.o., ed inoltre $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$, cioè f è una densità di probabilità.

Siano ora X_n e X v.a. con densità, rispettivamente, f_n e f. Presa $g \in C_b$, allora

$$\mathbb{E}(g(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_n(x)\,dx \quad \text{ e } \quad \mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x)\,dx$$

Allora, se M_g denota una costante positiva tale che $|g(x)| \leq M_g$ per ogni x, si ha

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}(g(X_n)) - \mathbb{E}(g(X))| = \Big|\int_{\mathbb{R}} g(x) f_n(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x)\,dx\Big| &\leq \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,|f_n(x) - f(x)|\,dx \\ &\leq M_g ||f_n - f||_{L^1} \to 0 \quad \text{ per } n \to \infty.\end{aligned}$$

Quindi $\mathbb{E}(g(X_n)) \to \mathbb{E}(g(X))$ se $n \to \infty$ per ogni $g \in C_b$, cioè $X_n \to X$ in legge.

b) Per $x \in (0,1)$, si ha

$$F_n'(x) = 1 - \cos(2n\pi x) \geq 0,$$

quindi F_n è crescente su $(0,1)$. Poiché per $x < 0$ $F_n(x) = 0 = F_n(0)$ e per $x > 1$ $F_n(x) = 1 = F_n(1)$, F_n è monotona non decrescente. Inoltre, F_n è continua per ogni n, quindi in particolare càdlàg. Infine, $F_n(-\infty) = 0$ e $F_n(+\infty) = 1$, quindi F_n è una f.d. Notiamo infine che $f_n(x) = F_n'(x)$ esiste per q.o. x e $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 1$, quindi

$$f_n(x) = \Big(1 - \cos(2n\pi x)\Big) 1\!\!1_{x\in(0,1)}$$

è la densità associata alla f.d. F_n.

Fissiamo ora $x \in \mathbb{R}$. Allora,

$$\text{per ogni } x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

che è la f.d. di una v.a. $X \sim \text{Un}(0,1)$. Ma allora $X_n \to X$ in legge. Detta $f(x) = 1\!\!1_{x\in(0,1)}$ la densità di X, in questo caso $f_n \not\to f$ in $L^1(\mathbb{R}, \text{Leb})$, e neanche per q.o. x. Infatti, $\cos(2n\pi x)$ non converge q.o., quindi $f_n \not\to f$ q.o. Inoltre,

$$\begin{aligned}||f_n - f||_{L^1} &= \int_0^1 |\cos(2n\pi x)|\,dx = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2n\pi} |\cos t|\,dt \\ &= \frac{1}{2n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\cos t|\,dt = \frac{1}{2n\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{2\pi} |\cos t|\,dt = \frac{C}{2\pi}\end{aligned}$$

dove $C = \int_0^{2\pi} |\cos t|\, dt > 0$. Quindi $||f_n - f||_{L^1} \not\to 0$.

Esercizio 4 Osserviamo anzitutto che la f.d. di X_n è

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ nx & \text{se } 0 \le x < 1/n \\ 1 & \text{se } x \ge 1/n \end{cases}$$

a) La f.d. di $n^\gamma X_n$ è

$$F_n^\gamma(x) = \mathbb{P}(n^\gamma X_n \le x) = G_n(x/n^\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ n^{-(\gamma-1)}x & \text{se } 0 \le x < n^{\gamma-1} \\ 1 & \text{se } x \ge n^{\gamma-1} \end{cases}$$

Allora, $\lim_{n\to\infty} F_n^\gamma(x) = F^\gamma(x)$, dove $F^\gamma(x) \equiv 0$ se $\gamma > 1$ e

$$F^\gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \le 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

se invece $\gamma \le 1$. Quindi se $\gamma > 1$ non c'è convergenza in legge: la funzione limite F^γ non è una f.d., neanche se la si modifica su un insieme trascurabile, perché $F^\gamma(+\infty) = 0$. Se invece $\gamma \le 1$, la funzione limite F^γ non è una f.d. ma lo diventa se la si modifica solo nel punto $x = 0$: posto

$$\tilde{F}^\gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$$

allora $\tilde{F}^\gamma$ è la f.d. della v.a. (costante) $X = 0$ q.c. e $F_n^\gamma(x) \to \tilde{F}^\gamma(x)$ per ogni x di continuità per $\tilde{F}^\gamma$, quindi $n^\gamma X_n \to 0$ in legge (e in particolare $n^\gamma X_n \to 0$ in probabilità...).

b) Ser $\beta = 0$, $(nX_n)^\beta = 1$ q.c., quindi la convergenza è ovvia. Studiamo allora il caso $\beta \neq 1$.

La f.d. di $(n\, X_n)^\beta$ è $F_n^\beta(x) = \mathbb{P}((n\, X_n)^\beta \le x)$. Per $\beta > 0$, $F_n^\beta(x) = 0$ se $x \le 0$ e $F_n^\beta(x) = \mathbb{P}(X_n \le x^{1/\beta}/n)$ se $x > 0$, quindi

$$F_n^\beta(x) \equiv F^\beta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x^{1/\beta} & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

Per $\beta < 0$, $F_n^\beta(x) = 0$ se $x \le 0$ e se invece $x > 0$ si ha $F_n^\beta(x) = \mathbb{P}(X_n \ge x^{1/\beta}/n) = 1 - \mathbb{P}(X_n < x^{1/\beta}/n)$, quindi

$$F_n^\beta(x) \equiv F^\beta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 - x^{1/\beta} & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$$

Allora, per $\beta \neq 0$, F_n^β non dipende da n, quindi $(nX_n)^\beta$ converge in legge ad una v.a. X_β con f.d. F^β.

Esercizio 5 Dall'esercizio 1 dell'esercitazione VII segue che le v.a. R_n sono indipendenti con densità comune $f_R(r) = 2r\, 1\!\!1_{0<r<1}$ e Z_n ha f.d.

$$G_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 0 \\ 1 - (1 - z^2)^n & \text{se } 0 \le z < 1 \\ 1 & \text{se } z \ge 1 \end{cases}$$

Detta F_n la f.d. di $\sqrt{n}\, Z_n$, si ha $F_n(x) = 0$ se $x < 0$. Se invece $x \ge 0$, allora per ogni n grande si ha

$$F_n(x) = \mathbb{P}(\sqrt{n}\, Z_n \le x) = G_n(x/\sqrt{n}) = 1 - \Big(1 - \frac{x^2}{n}\Big)^n \to 1 - e^{-x^2}, \qquad \text{se } n \to \infty,$$

quindi, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2} & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$$

e F è una f.d. Dunque, $\sqrt{n}\, Z_n$ converge in legge ad una v.a. X che ha f.d. F, o equivalentemente densità[4] $f(x) = x\, e^{-x^2}\, 1\!\!1_{x>0}$.

[4] Questa densità è nota in probabilità e dà luogo ad una legge detta "di Weibull". In generale, si dice che X ha legge di Weibull se ha densità $p(x) = \lambda\beta\, x^{\beta-1}\, e^{-\lambda\, x^{\beta}}\, 1\!\!1_{x>0}$, dove λ e β sono parametri positivi. Si noti che se $\beta = 1$ ci si riduce ad una legge $\mathrm{Exp}(\lambda)$.