Esercizi di CP2, VIII
a.a. 2001/2002

Esercizio 1 Siano X e Y due v.a. indipendenti $\mathrm{N}(0,1)$. Siano[1] $\Theta = \arg(X,Y)$ e $R = \sqrt{X^2+Y^2}$.

a) Calcolare la densità congiunta di R e Θ.

b) R e Θ sono indipendenti? Calcolare le densità marginali e le rispettive medie.

c) Sia $U = \Theta\, 1\!\!1_{R\le 1}$. La coppia (U,Θ) è assolutamente continua?

d) Calcolare la covarianza tra U e Θ. Si tratta di due v.a. indipendenti?

Esercizio 2 Siano X e Y due v.a. indipendenti, $X,Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Si ponga

$$U = \min\{X,Y\}, \qquad V = \max\{X,Y\}, \qquad W = V - U.$$

a) Calcolare $\mathbb{P}(U = X)$ e $\mathbb{P}(V = Y)$.

b) Calcolare la distribuzione e la densità congiunta di U, V.

c) Calcolare la densità congiunta di U, W.

d) Le v.a. U e W sono indipendenti?

Esercizio 3 Siano X, Y, Z v.a. indipendenti e uniformi su $(0,1)$. Qual è la probabilità che possano rappresentare i tre lati di un triangolo?

Esercizio 4 Siano X, U, Z tre v.a. indipendenti tali che $X, U \sim \mathrm{N}(0,1)$ e $\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(Z=-1) = \frac{1}{2}$.

a) X e $Y = UZ$ sono indipendenti? Calcolare la densità congiunta di X e Y e calcolare $\mathbb{E}[Y]$.

b) Posto $W = XZ$, dire se le v.a. (X,W) e (X,Y,W) hanno densità.

d) Calcolare $\mathrm{Cov}(X,W)$. X e W sono indipendenti?

---

[1] Si ricorda che se $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\theta = \arg(x,y) \in [0,2\pi)$ denota l'angolo tra l'asse x e la semiretta uscente dall'origine che passa per il punto (x,y).

Soluzioni

Esercizio 1 Osserviamo che $(R, \Theta) = \varphi(X, Y)$, dove

$$\varphi(x,y)\ :\ \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arg(x,y) \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Su $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}$, φ è invertibile con inversa

$$\psi(r,\theta) = \varphi^{-1}\ :\ \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (r,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times (0, 2\pi)$$

Ora, $\mathbb{P}((X,Y) \in A) = \mathbb{P}(Y \neq 0) = 1$, quindi usando il TCV si ottiene

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_{X,Y} \circ \psi(r,\theta) \cdot |\det J_\psi(r,\theta)|\, 1\!\!1_{(r,\theta)\in\varphi(A)} = \frac{1}{2\pi}\, r\, e^{-r^2/2}\, 1\!\!1_{r>0,\theta\in(0,2\pi)}.$$

b) Osserviamo che $f_{R,\Theta}(r,\theta) = c\,\phi_1(r)\cdot\phi_2(\theta)$, con $c = 1/2\pi$, $\phi_1(r) = r\,e^{-r^2/2}\,1\!\!1_{r>0}$ e $\phi_2(\theta) = 1\!\!1_{\theta\in(0,2\pi)}$. Quindi R e Θ sono indipendenti, con densità

$$f_R(r) = r\,e^{-r^2/2}\,1\!\!1_{r>0} \qquad f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}\,1\!\!1_{\theta\in(0,2\pi)}.$$

In particolare, $\Theta \sim \mathrm{Un}(0, 2\pi)$. Calcoliamo le medie:

$$\mathbb{E}(R) = \int_{\mathbb{R}} r \cdot r\,e^{-r^2/2}\,1\!\!1_{r>0}\,dr = \int_0^\infty r^2\,e^{-r^2/2}\,dr = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,r^2\,e^{-r^2/2}\,dr = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

perché $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,r^2\,e^{-r^2/2}\,dr$ è la varianza di una v.a. $\mathrm{N}(0,1)$, che quindi vale 1. Poi,

$$\mathbb{E}(\Theta) = \int_{\mathbb{R}} \theta\,\frac{1}{2\pi}\,1\!\!1_{\theta\in(0,2\pi)}\,d\theta = \pi.$$

c) La coppia non ha densità. Si prenda, ad esempio, $A = \{0\} \times (0, 2\pi)$: $\mathrm{Leb}_2(A) = 0$ ma

$$\Lambda_{U,\Theta}(A) = \mathbb{P}(U = 0, \Theta \in (0,2\pi)) = \mathbb{P}(R > 1) = \int_1^\infty r\,e^{-r^2/2}\,dr > 0.$$

Si noti che la legge di U ha massa positiva in 0 ($\mathbb{P}(U = 0) > 0$), quindi U non ha densità e dunque non può esistere neanche la densità congiunta.

d) Si ha

$$\mathbb{E}(U\Theta) = \mathbb{E}(\Theta\,1\!\!1_{R\le1}\cdot\Theta) = \mathbb{E}(\Theta^2\,1\!\!1_{R\le1}) = \mathbb{E}(\Theta^2)\mathbb{E}(1\!\!1_{R\le1}) = \mathbb{E}(\Theta^2)\mathbb{P}(R > 1)$$

perché R e Θ sono indipendenti. Analogamente,

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(\Theta\,1\!\!1_{R\le1}) = \mathbb{E}(\Theta)\mathbb{E}(1\!\!1_{R\le1}) = \mathbb{E}(\Theta)\mathbb{P}(R \le 1).$$

Ma allora

$$\mathrm{Cov}(U,\Theta) = \mathbb{E}(\Theta^2)\mathbb{P}(R\le1) - \mathbb{E}^2(\Theta)\mathbb{P}(R\le1) = \mathbb{P}(R\le1)\mathrm{Var}(\Theta).$$

Ora,

$$\mathbb{P}(R \le 1) = \int_0^1 r\,e^{-r^2/2}\,dr = 1 - e^{-1/2} \qquad \text{e} \qquad \mathbb{E}(\Theta^2) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\,\theta^2\,d\theta = \frac{(2\pi)^2}{3}.$$

Quindi, $\mathrm{Var}(\Theta) = \pi^2/3$ e

$$\mathrm{Cov}(U,\Theta) = \frac{\pi^2}{3}\,(1 - e^{-1/2}),$$

da cui segue che U e Θ non sono indipendenti.

Esercizio 2 a) Poiché X e Y sono indipendenti, si ha

$$\mathbb{P}(U = X) = \mathbb{P}(\min\{X,Y\} = X) = \mathbb{P}(X \le Y) = \int_{\{x \le y\}} p_{X,Y}(x,y)dxdy$$
$$= \int_{\mathbb{R}} dx \int_x^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} 1\!\!1_{x>0} 1\!\!1_{y>0} dy = \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} dy = \frac{1}{2}.$$

Poi, $\mathbb{P}(V = Y) = \mathbb{P}(\max\{X,Y\} = Y) = \mathbb{P}(X \le Y) = \mathbb{P}(U = X) = 1/2$.

b) Osserviamo che $(U,V) = \varphi(X,Y)$, dove $\varphi(x,y) = (\min(x,y), \max(x,y))$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Definiamo

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x < y\} \ni (x,y) \mapsto \varphi_1(x,y) = (x,y)$$
$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > y\} \ni (x,y) \mapsto \varphi_2(x,y) = (y,x)$$

in modo che per $(x,y) \in A := A_1 \cup A_2$, $\varphi(x,y) = \varphi_1(x,y)\, 1\!\!1_{(x,y)\in A_1} + \varphi_2(x,y)\, 1\!\!1_{(x,y)\in A_2}$. Osserviamo che le due funzioni φ_1 e φ_2 sono regolari e invertibili, con inversa regolare: le due inverse sono date da

$$\phi_1(u,v) = (u,v), \quad \text{per } (u,v) \in \varphi_1(A_1) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, u < v\}$$
$$\phi_2(u,v) = (v,u), \quad \text{per } (u,v) \in \varphi_2(A_2) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,:\, u < v\}$$

Ora, poiché $\mathbb{P}((X,Y) \in A^c) = \mathbb{P}(X = Y) = 0$ (perché la coppia (X,Y) ha densità e $\{(x,y) : x = y\}$ ha Leb_2-misura nulla), si ha che $\mathbb{P}((X,Y) \in A) = 1$ quindi usando il TCV si ottiene

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y} \circ \psi_1(u,v)\, |\det J_{\psi_1}(u,v)|\, 1\!\!1_{(u,v)\in\varphi_1(A_1)} + f_{X,Y} \circ \psi_2(u,v)\, |\det J_{\psi_2}(u,v)|\, 1\!\!1_{(u,v)\in\varphi_2(A_2)}.$$

Ora, $|\det J_{\psi_i}(u,v)| = 1$, per $i = 1,2$; $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = f(x)f(y)$, dove f denota la densità di una $\text{Exp}(\lambda)$, quindi

$$f_{U,V}(u,v) = f(u)f(v)\, 1\!\!1_{u<v} + f(v)f(u)\, 1\!\!1_{u<v} = 2f(u)f(v) 1\!\!1_{u<v} = 2\lambda^2 e^{-\lambda(u+v)} 1\!\!1_{0<u<v}.$$

c) $(U,W) = (U, V-U) = \varphi(U,V)$, con $\varphi(u,v) = (u, v-u)$. φ è definita su $\mathbb{R}^2$, è regolare e con inversa $\psi(u,w) = (u, w+u)$ regolare, quindi

$$f_{U,W}(u,w) = f_{U,V} \circ \psi(u,w)\, |\det J_\psi(u,w)| = 2\lambda^2 e^{-\lambda(u+(w+u))} 1\!\!1_{0<u<w+u} = 2\lambda^2 e^{-\lambda(2u+w)} 1\!\!1_{u>0,w>0}.$$

d) Poiché $f_{U,W}(u,w) = \phi_1(u) \cdot \phi_2(w)$, le v.a. $U = \min(X,Y)$ e $W = V - U = \max(X,Y) - \min(X,Y)$ sono indipendenti (l'avreste detto?). Inoltre, calibrando la costante, si vede subito che

$$f_U(u) = 2\lambda e^{-2\lambda u} 1\!\!1_{u>0}, \qquad f_W(w) = \lambda e^{-\lambda w} 1\!\!1_{w>0},$$

quindi $U \sim \text{Exp}(2\lambda)$ e $W \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Esercizio 3 Sia T l'evento "*X, Y, Z possono formare un triangolo*". Allora, sappiamo che ciascun lato dev'essere minore od uguale alla somma degli altri due. Quindi

$$T^c = \{X \ge Y + Z\} \cup \{Y \ge X + Z\} \cup \{Z \ge X + Y\}$$

e i tre eventi sopra scritti sono disgiunti, o meglio le intersezioni a due a due hanno probabilità nulla (perché i tre "candidati lati" X, Y, Z sono ≥ 0 q.c.). Quindi,

$$\mathbb{P}(T) = 1 - \mathbb{P}(T^c) = 1 - \mathbb{P}(X \ge Y + Z) - \mathbb{P}(Y \ge X + Z) - \mathbb{P}(Z \ge X + Y) = 1 - 3\mathbb{P}(X \ge Y + Z),$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che la densità congiunta è simmetrica nelle tre variabili:

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = 1\!\!1_{(x,y,z)\in[0,1]^3}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq Y+Z) &= \int_{\{x \geq y+z\}} \mathbb{1}_{(x,y,z)\in[0,1]^3}\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 dy \int_0^1 dz \int_{\min\{y+z,1\}}^1 dx \\ &= \int_0^1 dy \int_0^1 (1-\min\{y+z,1\}) dz = \int_0^1 dy \int_0^1 (1-(y+z)) \mathbb{1}_{y+z<1} dz \\ &= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (1-(y+z)) dz = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

da cui segue che $\mathbb{P}(T) = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4 a) X e Y sono indipendenti perché $Y = UZ \equiv \varphi(U, Z)$ e X è indipendente sia da U che da Z. Calcoliamone la densità congiunta: usando l'indipendenza di X, U e Z, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X,Y) \in \Gamma) &= \mathbb{P}((X,Y) \in \Gamma, Z=1) + \mathbb{P}((X,Y) \in \Gamma, Z=-1) \\ &= \mathbb{P}((X,U) \in \Gamma, Z=1) + \mathbb{P}((X,U) \in \Gamma, Z=-1) \\ &= \mathbb{P}((X,U) \in \Gamma)\mathbb{P}(Z=1) + \mathbb{P}((X,U) \in \Gamma)\mathbb{P}(Z=-1) = \mathbb{P}((X,U) \in \Gamma)\end{aligned}$$

perché $\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(Z=-1) = 1/2$. Allora, detta $f_{X,U}$ la densità congiunta di (X, U), si ha

$$\Lambda_{X,Y}(\Gamma) = \mathbb{P}((X,Y) \in \Gamma) = \mathbb{P}((X,U) \in \Gamma) = \Lambda_{X,U}(\Gamma) = \int_\Gamma f_{X,U}(x,u)\, dx\, du$$

per ogni $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, quindi

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X,U}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2},$$

cioè X e Y sono due v.a. gaussiane standard e indipendenti. In particolare, $\mathbb{E}(Y) = 0$.

b) Osserviamo che $Z^2 = 1$ q.c., dunque $W^2 = (XZ)^2 = X^2$ q.c.: esiste una relazione che lega X e W, quindi la coppia non ha densità. Infatti, si prenda, ad esempio, $\Gamma = \{(x,w) \in \mathbb{R}^2 : w^2 = x^2\} = \{(x,w) \in \mathbb{R}^2 : w = x \text{ oppure } w = -x\}$. Γ è l'unione di due rette di $\mathbb{R}^2$, quindi ha Leb_2-misura nulla. Però, $\mathbb{P}((X,W) \in \Gamma) = \mathbb{P}(W^2 = X^2) = \mathbb{P}(Z^2 = 1) = 1$, e ciò prova che (X, W) non ha densità. Ma allora anche la tripla (X, Y, W) non ha densità: se esistesse la densità di (X, Y, W) esisterebbero tutte le densità marginali, in particolare quella di (X, W), il che è falso. Oppure, si può procedere come sopra: prendiamo $\Gamma = \{(x,y,w) \in \mathbb{R}^3 : w^2 = x^2\}$. Γ è ora l'unione di due piani di $\mathbb{R}^3$, quindi la Leb_3-misura nulla. Però, $\mathbb{P}((X,Y,W) \in \Gamma) = \mathbb{P}(W^2 = X^2) = 1$, il che assicura che la densità congiunta non esiste.

c) Essendo X e Z indipendenti, si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,W) &= \mathbb{E}(XW) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(W) = \mathbb{E}(X^2 Z) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(XZ) \\ &= \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}^2(X)\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Z)\mathrm{Var}(X) = 0\end{aligned}$$

perché $\mathbb{E}(Z) = 0$. Ma X e W non sono indipendenti. Infatti, ad esempio,

$$\mathbb{P}(0 < X < 1, W < 1) = \mathbb{P}(0 < X < 1, XZ > 1) \leq \mathbb{P}(Z > 1) = 0$$

quindi $\mathbb{P}(0 < X < 1, W < 1) = 0$. Ma $\mathbb{P}(0 < X < 1) > 0$, perché $X \sim \mathrm{N}(0,1)$, e $\mathbb{P}(W < 1) > 0$ perché

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W < 1) &= \mathbb{P}(XZ > 1) = \mathbb{P}(X > 1, Z = 1) + \mathbb{P}(X < -1, Z = -1) \\ &= \mathbb{P}(X > 1)\mathbb{P}(Z = 1) + \mathbb{P}(X < -1)\mathbb{P}(Z = -1) > 0.\end{aligned}$$

Oppure, basta osservare che $W = XZ$ ha la stessa legge di $Y = UZ$: X e U sono entrambe $\mathrm{N}(0,1)$ e indipendenti da Z. Allora $W \sim \mathrm{N}(0,1)$, quindi ha densità, e se X e W fossero indipendenti allora esisterebbe la densità di (X, W), il che non è vero.