Esercizi di CP2, IV
a.a. 2001/2002

Esercizio 1 Sia $f \in \mathcal{L}^1(S, \Sigma, \mu)$ tale che $\int_A f d\mu = 0$ per ogni $A \in \Sigma$. Dimostrare che $f = 0$ q.o.

Esercizio 2 Siano ρ, μ, ν misure σ-finite su (S, Σ).

a) Dimostrare che se $\nu \ll \mu$ e $\mu \ll \rho$ allora $\nu \ll \rho$ e

$$\frac{d\nu}{d\rho} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\rho} \qquad \rho\text{-q.o.}$$

b) Mostrare che se $\nu \equiv \mu$ (cioè $\nu \ll \mu$ e $\mu \ll \nu$) allora $\frac{d\nu}{d\mu} = (\frac{d\mu}{d\nu})^{-1}$ μ-q.o. e ν-q.o.

c) Supponiamo che $\mu \ll \rho$ e $\nu \ll \rho$ e sia $A = \{\frac{d\mu}{d\rho} = 0\} \cap \{\frac{d\nu}{d\rho} > 0\}$. Dimostrare che $\nu \ll \mu$ se e solo se $\rho(A) = 0$ e in tal caso

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{\frac{d\nu}{d\rho}}{\frac{d\mu}{d\rho}} \mathbb{1}_{\{\frac{d\mu}{d\rho} > 0\}} = \frac{\frac{d\nu}{d\rho}}{\frac{d\mu}{d\rho}} \mathbb{1}_{A^c} \qquad \mu\text{-q.o.}$$

Esercizio 3 Sia $f \in \mathcal{L}^1(S, \Sigma, \mu)$ con $f > 0$ μ-q.o. Posto $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$, dimostrare che $\nu \equiv \mu$.

Esercizio 4 Siano μ_1, μ_2 due misure di probabilità (ad esempio) su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, $\alpha \in (0,1)$ e $\mu = \alpha\, \mu_1 + (1 - \alpha)\, \mu_2$. Mostrare che μ è ancora una misura di probabilità. Inoltre,

a) dimostrare che $\mu \ll$ Leb se e solo se $\mu_1 \ll$ Leb e $\mu_2 \ll$ Leb;

b) dimostrare che μ è discreta se e solo se μ_1 e μ_2 sono entrambe discrete;

c) trovare condizioni su μ_1 e μ_2 t.c. μ non è né discreta né assolutamente continua rispetto a Leb.

Usando **c)**, dedurre che esistono variabili aleatorie che pur non assumendo un numero discreto di valori, non hanno densità di probabilità.

Soluzioni

Esercizio 1 $\{f>0\} \in \Sigma$, quindi $0 = \int_{\{f>0\}} f\,d\mu = \int f\,\mathbb{1}_{\{f>0\}}\,d\mu$. Poiché $f\,\mathbb{1}_{\{f>0\}} \in (m\Sigma)^+$, allora $\mu(\{f>0\}) = 0$. Analogamente, $\{f<0\} \in \Sigma$, quindi $0 = -\int_{\{f<0\}} f\,d\mu = \int -f\,\mathbb{1}_{\{f>0\}}\,d\mu$ e $-f\,\mathbb{1}_{\{f<0\}} \in (m\Sigma)^+$, allora $\mu(\{f<0\}) = 0$. Infine, $\mu(\{f\neq 0\}) = \mu(\{f>0\}\cup\{f<0\}) = 0$.

Esercizio 2 a) Se $\rho(A) = 0$ allora $\mu(A) = 0$ ($\mu \ll \rho$), e quindi $\nu(A) = 0$ ($\nu \ll \mu$). Ciò prova che $\nu \ll \rho$. Dobbiamo mostrare che

$$\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu}\cdot\frac{d\mu}{d\rho}\,d\rho, \qquad A \in \Sigma.$$

Abbiamo visto che se $\mu \ll \rho$ allora $h \in \mathcal{L}^1(S,\Sigma,\mu)$ se e solo se $h\cdot\frac{d\mu}{d\rho} \in \mathcal{L}^1(S,\Sigma,\rho)$ e in tal caso

$$\int h\,d\mu = \int h\cdot\frac{d\mu}{d\rho}\,d\rho.$$

Ora, $\frac{d\nu}{d\mu} \in \mathcal{L}^1(S,\Sigma,\mu)$, quindi $\frac{d\nu}{d\mu}\,\mathbb{1}_A \in \mathcal{L}^1(S,\Sigma,\mu)$ per ogni $A \in \Sigma$, e allora

$$\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu = \int \frac{d\nu}{d\mu}\,\mathbb{1}_A\,d\mu = \int \frac{d\nu}{d\mu}\,\mathbb{1}_A\cdot\frac{d\mu}{d\rho}\,d\rho = \int_A \frac{d\nu}{d\mu}\cdot\frac{d\mu}{d\rho}\,d\rho.$$

b) Si noti che se $\mu \equiv \nu$ allora μ e ν hanno gli stessi insiemi di misura nulla. Inoltre, poiché $\nu \ll \mu$ e $\mu \ll \nu$, usando **a)** con $\rho = \nu$, si ottiene

$$1 = \frac{d\nu}{d\nu} = \frac{d\nu}{d\mu}\cdot\frac{d\mu}{d\nu}.$$

da cui la tesi.

c) Osserviamo che $\mu(A) = \int_A \frac{d\mu}{d\rho}\,d\rho \le \int_{\{\frac{d\mu}{d\rho}=0\}} \frac{d\mu}{d\rho}\,d\rho = 0$, quindi $\mu(A) = 0$.

Supponiamo $\nu \ll \mu$: in particolare allora $0 = \nu(A) = \mu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\rho}\,d\rho$. Poiché $\frac{d\nu}{d\rho} \ge 0$ ρ-q.o., dev'essere $\frac{d\nu}{d\rho}\,\mathbb{1}_A = 0$ ρ-q.o. Ma

$$\Big\{\frac{d\nu}{d\rho}\,\mathbb{1}_A > 0\Big\} = A \cap \Big\{\frac{d\nu}{d\rho} > 0\Big\} = A,$$

quindi dev'essere $\rho(A) = 0$.

Viceversa, supponiamo che $\rho(A) = 0$. Sia $N \in \Sigma$ tale che $\mu(N) = 0$, cioè $0 = \mu(N) = \int_N \frac{d\mu}{d\rho}\,d\rho = \int_{N\cap\{\frac{d\mu}{d\rho}>0\}} \frac{d\mu}{d\rho}\,d\rho$. Allora,

$$\rho\Big(N \cap \Big\{\frac{d\mu}{d\rho} > 0\Big\}\Big) = 0.$$

Proviamo che $\nu(N) = 0$:

$$\mu(N) = \int_N \frac{d\nu}{d\rho}\,d\rho = \int_{N\cap\{\frac{d\nu}{d\rho}>0\}} \frac{d\nu}{d\rho}\,d\rho.$$

Ora,

$$N \cap \Big\{\frac{d\nu}{d\rho} > 0\Big\} = \Big(N \cap \Big\{\frac{d\nu}{d\rho} > 0\Big\} \cap \Big\{\frac{d\mu}{d\rho} = 0\Big\}\Big) \cup \Big(N \cap \Big\{\frac{d\nu}{d\rho} > 0\Big\} \cap \Big\{\frac{d\mu}{d\rho} > 0\Big\}\Big) \subset A \cup \Big(N \cap \Big\{\frac{d\mu}{d\rho} > 0\Big\}\Big)$$

quindi $\rho(N \cap \{\frac{d\nu}{d\rho} > 0\}) \le \rho(A) + \rho(N \cap \{\frac{d\mu}{d\rho} > 0\}) = 0$. Ma allora

$$\mu(N) = \int_{N\cap\{\frac{d\nu}{d\rho}>0\}} \frac{d\nu}{d\rho}\,d\rho = 0.$$

Infine, supponendo $\nu \ll \mu$, usando **a)** si ha ρ-q.o.

$$\frac{d\nu}{d\rho} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{d\rho}$$

quindi su $\{\frac{d\mu}{d\rho} > 0\}$ si ha

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{\frac{d\nu}{d\rho}}{\frac{d\mu}{d\rho}}.$$

Ora, gli insiemi $\{\frac{d\mu}{d\rho} > 0\}^c$ e A sono di ρ-misura nulla, quindi di μ-misura nulla. Allora possiamo scrivere

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{\frac{d\nu}{d\rho}}{\frac{d\mu}{d\rho}} \mathbb{1}_{\{\frac{d\mu}{d\rho} > 0\}} = \frac{\frac{d\nu}{d\rho}}{\frac{d\mu}{d\rho}} \mathbb{1}_{A^c}$$

q.o. rispetto a μ.

Esercizio 3 Ovviamente $\nu \ll \mu$. Dimostriamo quindi che $\mu \ll \nu$. Sia A tale che $\nu(A) = 0$. Allora, $\int f \, \mathbb{1}_A \, d\mu = 0$ e poiché $f > 0$ μ-q.o., dev'essere $f \, \mathbb{1}_A = 0$ μ-q.o., cioè

$$\mu(\{f \, \mathbb{1}_A > 0\}) = 0.$$

Ora, $A = \{\mathbb{1}_A > 0\} = \{f > 0, \mathbb{1}_A > 0\} \cup \{f = 0, \mathbb{1}_A > 0\} \subset \{f \mathbb{1}_A > 0\} \cup \{f = 0\}$. Poichè questi due ultimi insiemi sono di μ-misura nulla, si ha $\mu(A) = 0$, quindi $\mu \ll \nu$.

Esercizio 4 $\mu(A) = \alpha\mu_1(A) + (1-\alpha)\mu_2(A) \geq 0$ per ogni $A \in \mathcal{B}$. Inoltre, se $A_1, A_2, \dots$ sono disgiunti,

$$\begin{aligned} \mu(\cup_k A_k) &= \alpha\mu_1(\cup_k A_k) + (1-\alpha)\mu_2(\cup_k A_k) = \alpha \sum_k \mu_1(A_k) + (1-\alpha) \sum_k \mu_2(A_k) \\ &= \sum_k \Big(\alpha\mu_1(A_k) + (1-\alpha)\mu_2(A_k)\Big) = \sum_k \mu(A_k) \end{aligned}$$

quindi μè una misura. Infine, poiché $\mu_1(\mathbb{R}) = \mu_2(\mathbb{R}) = 1$, $\mu(\mathbb{R}) = \alpha + (1-\alpha) = 1$, cioè μ è una misura di probabilità su $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

a) Dev'essere $\mathrm{Leb}(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$. Ora, se $0 = \mu(A) = \alpha\mu_1(A) + (1-\alpha)\mu_2(A)$, allora $\mu_1(A) = 0$ e $\mu_2(A) = 0$. Ovviamente se $\mu_1 \ll \mathrm{Leb}$ e $\mu_2 \ll \mathrm{Leb}$ allora $\mu \ll \mathrm{Leb}$. Quindi, $\mu \ll \mathrm{Leb}$ se e solo se $\mu_1 \ll \mathrm{Leb}$ e $\mu_2 \ll \mathrm{Leb}$.

b) Se μ_1 e μ_2 sono discrete, cioè

$$\mu_i(A) = \sum_k p_k^i \delta_{\{x_k^i\}}(A), \qquad i = 1, 2$$

allora μ è ovviamente discreta. Viceversa, supponiamo che μ sia discreta, cioè esitono dei numeri non negativi $p_1, p_2, \dots$ tali che

$$\mu(A) = \sum_k p_k \delta_{\{x_k\}}(A).$$

Posto $E = \{x_1, x_2, \dots\}$, si ha $\mu(E^c) = 0$, quindi $\mu_1(E^c) = \mu_2(E^c) = 0$, ovvero sia μ_1 che μ_2 sono concentrate su E: per $i = 1, 2$, esistono dei numeri non negativi $p_1^i, p_2^i, \dots$ tali che $\mu_i(\{x_k\}) = p_k^i$, per ogni k, quindi μ_1 e μ_2 sono due misure discrete.

c) Sia $\mu_1 \ll \mathrm{Leb}$ e μ_2 discreta, ad esempio

$$\mu_1(A) = \int_A f(x)dx, \qquad \mu_2(A) = \delta_{\{x_0\}}(A)$$

dove $f \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ fissato. Allora, per ogni $\alpha \in (0,1)$,

$$\mu(A) = \alpha \int_A f(x)dx + (1-\alpha)\delta_{\{x_0\}}(A)$$

è una misura di probabilità né discreta né assolutamente continua rispetto a Leb. Definendo

$$F(x) = \mu((-\infty, x]),$$

la funzione F verifica le tre proprietà caratteristiche delle funzioni di distribuzione, quindi (Teorema di Skorohod) esiste una v.a. X tale che $F_X = F$ e $\Lambda_X = \mu$. Tale v.a. non è discreta, né assolutamente continua.