Esercizi di CP2, III
a.a. 2001/2002

Esercizio 1 a) Dato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, siano $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \ldots, \mathcal{J}_m$ π-systems su Ω tali che $\mathcal{J}_i \subset \mathcal{F}$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, m$. Si ponga $\mathcal{G}_i = \sigma(\mathcal{J}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Dimostrare che:

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^m G_i) = \prod_{i=1}^m \mathbb{P}(G_i) \qquad \text{per ogni } G_1 \in \mathcal{G}_1, \ldots, G_m \in \mathcal{G}_m$$

se e solo se

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^m J_i) = \prod_{i=1}^m \mathbb{P}(J_i) \qquad \text{per ogni } J_1 \in \mathcal{J}_1, \ldots, J_m \in \mathcal{J}_m.$$

[sugg.: si ricorda che se due misure finite coincidono su un π-system allora coincidono sulla σ-algebra generata dal π-system]

b) Dedurre che:

b1) gli eventi $E_1, E_2, \ldots$ sono indipendenti se e solo se per ogni n e per ogni n-upla di indici distinti $i_1, \ldots, i_n$

$$\mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_n}) = \mathbb{P}(E_{i_1})\mathbb{P}(E_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(E_{i_n});$$

[sugg.: si usi la definizione di eventi indipendenti e si ricordi che $\{E_i\}$ è un (banale) π-system]

b2) le v.a. reali $X_1, X_2, \ldots$ sono indipendenti se e solo se per ogni n, per ogni n-upla di indici distinti $i_1, \ldots, i_n$ e per ogni $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X_{i_1} \leq x_1, \ldots, X_{i_n} \leq x_n) = \mathbb{P}(X_{i_1} \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_{i_n} \leq x_n).$$

[sugg.: si ricorda che $\sigma(X_i) = \sigma(\mathcal{I}_i)$, dove $\mathcal{I}_i = X_i^{-1}\pi(\mathbb{R})$ è un π-system]

c) Dimostrare che le v.a. reali $X_1, X_2, \ldots$ sono indipendenti se e solo se per ogni k e $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_k \leq x_k) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_k \leq x_k).$$

[sugg.: si noti che $\{X_i \leq N\} \uparrow \{X_i \in \mathbb{R}\} = \Omega$ per $N \uparrow +\infty$]

Esercizio 2 Siano $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n$ π-systems su Ω tali che $\mathcal{I}_i \subset \mathcal{F}$ e $\Omega \in \mathcal{I}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Dimostrare che $\sigma(\mathcal{I}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{I}_n)$ sono indipendenti se e solo se

$$\mathbb{P}(I_1 \cap \ldots \cap I_n) = \mathbb{P}(I_1) \cdots \mathbb{P}(I_n), \qquad \text{per ogni } I_1 \in \mathcal{I}_1, \ldots I_n \in \mathcal{I}_n.$$

Esercizio 3 Fissato $s > 1$, sia $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$. Sia X una v.a. discreta tale che

$$\mathbb{P}(X = n) = n^{-s}/\zeta(s), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Fissato un numero primo p, si definisce $E_p = \{X \text{ è divisibile per } p\}$.

a) Dimostrare che gli eventi $(E_p \,:\, p \text{ primo})$ sono indipendenti.

b) Dimostrare che $\mathbb{P}(\cap_{p>1} E_p^c) = \prod_{p>1}(1 - 1/p^s)$.

c) Dimostrare che $\{X = 1\} = \cap_{p>1} E_p^c$ e dedurre la formula di Eulero: $1/\zeta(s) = \prod_{p>1}(1 - 1/p^s)$.

d) Dimostrare che $\mathbb{P}(E_p \text{ i.o.}) = 0$ e $\mathbb{P}(E_p^c \text{ i.o.}) = 1$. Discutere se si tratta di risultati ovvi.

Esercizio 4 Siano X e Y due v.a. discrete ed indipendenti, a valori in $E_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ e $E_Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ rispettivamente. Indichiamo con p_X e p_Y la distribuzione (discreta) di X e Y:

$$p_X(x_k) = \mathbb{P}(X = x_k) \qquad p_Y(y_j) = \mathbb{P}(Y = y_j), \qquad k, j.$$

Dimostrare che $Z = X + Y$ è una v.a. discreta, a valori in E_Z da determinare, con distribuzione (data dalla convoluzione discreta tra p_X e p_Y:)

$$\mathbb{P}(Z = z) =: p_Z(z) = \sum_k p_X(x_k)\, p_Y(z - x_k) = \sum_j p_X(z - y_j)\, p_Y(y_j), \qquad z \in E_Z.$$

[sugg.: si ricorda che dato un numero finito o numerabile di eventi disgiunti A_n tali che $\cup_n A_n = \Omega$ allora $\mathbb{P}(B) = \sum_n \mathbb{P}(B \cap A_n)$ per ogni altro evento B]

Soluzioni

Esercizio 1 a) Poiché $\mathcal{J}_i \subset \sigma(\mathcal{J}_i) = \mathcal{G}_i$, un'implicazione è ovvia. Mostriamo quindi il "se". Presi $J_2 \in \mathcal{J}_2, \dots, J_m \in \mathcal{J}_m$, siano

$$\mu, \nu \,:\, \mathcal{G}_1 \to [0,1], \qquad \mu(G_1) = \mathbb{P}(G_1 \cap J_2 \cap \ldots \cap J_m), \quad \nu(G_1) = \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(J_2)\cdots\mathbb{P}(J_m).$$

μ e ν sono due misure finite su $(\Omega, \mathcal{G}_1)$: presi $\{G_{1n}\}_n \subset \mathcal{G}_1$ disgiunti,

$$\begin{aligned}\mu(\cup_n G_{1n}) &= \mathbb{P}\Big(\Big(\cup_n G_{1n}\Big) \cap J_2 \cap \ldots \cap J_m\Big) = \mathbb{P}\Big(\cup_n \Big(G_{1n} \cap J_2 \cap \ldots \cap J_m\Big)\Big) \\ &= \sum_n \mathbb{P}(G_{1n} \cap J_2 \cap \ldots \cap J_m) = \sum_n \mu(G_{1n}) \\ \nu(\cup_n G_{1n}) &= \mathbb{P}(\cup_n G_{1n})\mathbb{P}(J_2)\cdots\mathbb{P}(J_m) == \sum_n \mathbb{P}(G_{1n})\mathbb{P}(J_2)\cdots\mathbb{P}(J_m) = \sum_n \nu(G_{1n})\end{aligned}$$

e $\mu(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cap J_2 \cap \ldots \cap J_m) = \mathbb{P}(J_2 \cap \ldots \cap J_m) \leq 1$, $\nu(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega)\mathbb{P}(J_2)\cdots\mathbb{P}(J_m) = \mathbb{P}(J_2)\cdots\mathbb{P}(J_m) \leq 1$. Inoltre, per ogni $J_1 \in \mathcal{J}_1$,

$$\mu(J_1) = \mathbb{P}(J_1 \cap J_2 \cap \ldots \cap J_m) = \mathbb{P}(J_1)\mathbb{P}(J_2)\cdots\mathbb{P}(J_m) = \nu(J_1).$$

Dunque, μ e ν sono misure finite che coincidono su $\mathcal{J}_1$ e $\mathcal{G}_1 = \sigma(\mathcal{J}_1)$. Allora, $\mu \equiv \nu$. Inoltre, data l'arbitrarietà di $J_2, \dots, J_m$, possiamo concludere che

$$\mathbb{P}(G_1 \cap J_2 \cap \ldots \cap J_m) = \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(J_2)\cdots\mathbb{P}(J_m), \qquad \text{per ogni } G_1 \in \mathcal{G}_1, J_2 \in \mathcal{J}_2, \dots, J_m \in \mathcal{J}_m. \qquad (*)$$

Proseguiamo ora allo stesso modo: presi $G_1 \in \mathcal{G}_1, J_3 \in \mathcal{J}_3, \dots, J_m \in \mathcal{J}_m$, definiamo

$$\mu, \nu \,:\, \mathcal{G}_2 \to [0,1], \qquad \mu(G_2) = \mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \cap J_3 \cap \ldots \cap J_m), \quad \nu(G_2) = \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(G_2)\mathbb{P}(J_3)\cdots\mathbb{P}(J_m).$$

Allora, μ e ν sono due misure finite che, da $(*)$, coincidono su $\mathcal{J}_2$, quindi coincidono su $\sigma(\mathcal{J}_2) = \mathcal{G}_2$. Data l'arbitrarietà di $G_1, J_3, \dots, J_m$, possiamo concludere che

$$\mathbb{P}(G_1 \cap G_2 \cap J_3 \cap \ldots \cap J_m) = \mathbb{P}(G_1)\mathbb{P}(G_2)\mathbb{P}(J_3)\cdots\mathbb{P}(J_m)$$

per ogni $G_1 \in \mathcal{G}_1, G_2 \in \mathcal{G}_2, J_3 \in \mathcal{J}_3 \dots, J_m \in \mathcal{J}_m$. Iterando il procedimento, si ottiene la tesi.

b1) Dalla definizione segue facilmente che $E_1, E_2, \dots$ sono indipendenti se per ogni n e per ogni $i_1, \dots, i_n$ indici distinti

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n), \text{ per ogni } A_1 \in \mathcal{E}_{i_1}, A_2 \in \mathcal{E}_{i_2}, \dots A_n \in \mathcal{E}_{i_n} \qquad (\bullet)$$

dove, ricordiamo, $\mathcal{E}_i = \sigma(\{E_i\})$. Ora, $\mathcal{J}_i = \{E_i\}$ è un π-system, quindi da **a)** segue che $(\bullet)$ è verificata se e solo se quella fattorizzazione è valida per $A_1 \in \mathcal{J}_{i_1}, \dots A_n \in \mathcal{J}_{i_n}$, quindi se e solo se

$$\mathbb{P}(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_n}) = \mathbb{P}(E_{i_1})\mathbb{P}(E_{i_2})\cdots\mathbb{P}(E_{i_n}),$$

b2) $X_1, X_2, \dots$ sono indipendenti se per ogni n e per ogni $i_1, \dots, i_n$ indici distinti

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\cdots\mathbb{P}(A_n), \text{ per ogni } A_1 \in \sigma(X_{i_1}), \dots A_n \in \sigma(X_{i_n}). \qquad (\bullet\bullet)$$

Posto $\mathcal{J}_i = X_i^{-1}\pi(\mathbb{R})$, allora $\mathcal{J}_i$ è un π-system che genera $\sigma(X_i)$: da **a)** segue che $(\bullet\bullet)$ è verificata se e solo se quella fattorizzazione è valida per $A_1 \in \mathcal{J}_{i_1}, \dots A_n \in \mathcal{J}_{i_n}$. Ora, se $A_k \in \mathcal{J}_{i_k}$ allora

$$A_k = X_{i_k}^{-1}((-\infty, x_k]) = \{X_{i_k} \leq x_k\}$$

per qualche $x_k \in \mathbb{R}$. Quindi ($\bullet\bullet$) è vera se e solo se

$$\mathbb{P}(X_{i_1} \leq x_1, \ldots, X_{i_n} \leq x_n) = \mathbb{P}(X_{i_1} \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_{i_n} \leq x_n) \text{ per ogni } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

c) Ovviamente, se per ogni n e per ogni $i_1, \ldots, i_n$ indici distinti

$$\mathbb{P}(X_{i_1} \leq x_1, \ldots, X_{i_n} \leq x_n) = \mathbb{P}(X_{i_1} \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_{i_n} \leq x_n) \text{ per ogni } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},$$

allora evidentemente

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_k) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1) \cdots \mathbb{P}(X_k \leq x_k) \text{ per ogni } k \text{ e } x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}.$$

Mostriamo il viceversa. Fissiamo n indici distinti $i_1, \ldots, i_n$ e n numeri reali $x_1, \ldots, x_n$. Prendiamo ora $k = \max\{i_1, \ldots, i_n\}$ e consideriamo la k-upla $y_1^{(N)}, \ldots y_k^{(N)}$ così definita:

$$y_\ell^{(N)} = \begin{cases} x_j & \text{se esiste } j \text{ tale che } \ell = i_j \\ N & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per ipotesi,

$$\mathbb{P}(X_1 \leq y_1^{(N)}, \ldots, X_k \leq y_k^{(N)}) = \mathbb{P}(X_1 \leq y_1^{(N)}) \cdots \mathbb{P}(X_k \leq y_k^{(N)}).$$

Ora, se $\ell \neq i_j$ per ogni j e se $N \to \infty$, $\{X_\ell \leq y_\ell^{(N)}\} = \{X_\ell \leq N\} \uparrow \{X \in \mathbb{R}\} = \Omega$, quindi $\mathbb{P}(X_\ell \leq y_\ell^{(N)}) \uparrow 1$. Inoltre, sempre per $N \to \infty$, $\{X_1 \leq y_1^{(N)}, \ldots, X_k \leq y_k^{(N)}\} \uparrow \{X_{i_j} \leq x_j, j = 1, \ldots, n, \text{ e } X_\ell \in \mathbb{R}, \ell \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{i_1, \ldots, i_n\}\} = \{X_{i_1} \leq x_1, \ldots, X_{i_n} \leq x_n\}$, quindi $\mathbb{P}(X_1 \leq y_1^{(N)}, \ldots, X_n \leq y_n^{(N)}) \uparrow \mathbb{P}(X_{i_1} \leq x_1, \ldots, X_{i_n} \leq x_n)$. Ma allora passando al limite per $N \to \infty$, si ottiene

$$\mathbb{P}(X_{i_1} \leq x_1, \ldots, X_{i_n} \leq x_{i_n}) = \mathbb{P}(X_{i_1} \leq x_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(X_{i_n} \leq x_{i_n})$$

e la tesi è dimostrata.

Esercizio 2 Se $\sigma(\mathcal{I}_1), \ldots \sigma(\mathcal{I}_n)$ sono indipendenti, allora quella fattorizzazione è evidentemente valida. Viceversa, occorre dimostrare che, fissato k e fissati k indici distinti $i_1, \ldots, i_k$ di $1, \ldots, n$,

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k}) \quad \text{per ogni } A_{i_1} \in \sigma(\mathcal{I}_{i_1}), \ldots A_{i_k} \in \sigma(\mathcal{I}_{i_k}).$$

Usando l'esercizio 1 **a)**, questa fattorizzazione è valida se vale in particolare scegliendo $A_{i_1} = I_{i_1} \in \mathcal{I}_{i_1}, \ldots A_{i_k} = I_{i_k} \in \mathcal{I}_{i_k}$. Infatti, per ogni $\ell = 1, \ldots, n$, prendiamo

$$I_\ell = \begin{cases} I_{i_j} & \text{se esiste } j = 1, \ldots, k \text{ t.c. } \ell = i_j \\ \Omega & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Poiché $\Omega \in \mathcal{I}_\ell$ per ogni ℓ, allora $I_\ell \in \mathcal{I}_\ell$ per ogni ℓ, quindi

$$\mathbb{P}(\cap_{j=1}^k I_{i_j}) = \mathbb{P}(\cap_{\ell=1}^n I_\ell) = \prod_{\ell=1}^n \mathbb{P}(I_\ell) = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}(I_{i_j}).$$

Esercizio 3 a) Basta far vedere che $\mathbb{P}(\cap_{k=1}^n E_{p_k}) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(E_{p_k})$, per ogni n e $p_1, \ldots, p_n$ primi. Intanto, si ha

$$E_p = \{X \text{ è divisibile per } p\} = \{X = pk \text{ per qualche } k\} = \cup_{k\geq 1}\{X = pk\}$$

e l'unione è ovviamente disgiunta, quindi

$$\mathbb{P}(E_p) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X = pk) = \sum_{k\geq 1} (pk)^{-s}/\zeta(s) = p^{-s}/\zeta(s) \sum_{k\geq 1} k^{-s} = p^{-s}.$$

Inoltre, $\cap_{k=1}^n E_{p_k} = \{X$ è divisibile per $p_1, p_2, \dots p_n\} = \{X = p_1 p_2 \cdots p_n\, k$ per qualche $k\} = \cup_{k\geq 1}\{X = p_1 p_2 \cdots p_n\, k\}$, dunque

$$\mathbb{P}(\cap_{k=1}^n E_{p_k}) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X = p_1 p_2 \cdots p_n\, k) = \sum_{k\geq 1} (p_1 p_2 \cdots p_n\, k)^{-s}/\zeta(s)$$
$$= (p_1 p_2 \cdots p_n)^{-s}/\zeta(s) \sum_{k\geq 1} k^{-s} = (p_1 p_2 \cdots p_n)^{-s}.$$

Allora,

$$\mathbb{P}(\cap_{k=1}^n E_{p_k}) = (p_1 p_2 \cdots p_n)^{-s} = \prod_{k=1}^n p_k^{-s} = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(E_{p_k}).$$

b) Indichiamo con $\{p_k\}_k$ la successione dei numeri primi > 1 e poniamo $G_n = \cap_{k=1}^n E_{p_k}^c$. Allora $G_n \downarrow G = \cap_{p>1} E_p^c$, quindi

$$\mathbb{P}(\cap_{p>1} E_p^c) = \mathbb{P}(G) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(G_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\cap_{k=1}^n E_{p_k}^c)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(E_{p_k}^c) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n (1 - 1/p_k^s) = \prod_{p>1} (1 - 1/p^s)$$

dove si è usato il fatto che anche gli eventi (E_p^c : p primo) sono indipendenti.

c) Ovviamente, $X = 1$ equivale a dire che X non è divisibile per ogni primo $p > 1$, il che in simboli diventa: $\{X = 1\} = \cap_{p>1} E_p^c$. Allora,

$$1/\zeta(s) = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\cap_{p>1} E_p^c) = \prod_{p>1} (1 - 1/p^s).$$

c) Abbiamo visto che $\mathbb{P}(E_p) = 1/p^s$, quindi $\sum_p \mathbb{P}(E_p) < \infty$. Da BC1 segue allora che $\mathbb{P}(E_p \text{ i.o.}) = 0$. Poi, $\mathbb{P}(E_p^c) = 1 - 1/p^s$, quindi $\sum_p \mathbb{P}(E_p^c) = \infty$. Poiché gli E_p^c sono indipendenti, allora si può usare BC2, che dà $\mathbb{P}(E_p^c \text{ i.o.}) = 1$.

Questi due risultati non sono certamente sorprendenti. Infatti, ricordando che l'evento $\{A_n \text{ i.o.}\}$ significa che A_n si verifica per infiniti indici n, allora $\mathbb{P}(E_p \text{ i.o.}) = 0$ dice che l'evento "X è divisibile per infiniti numeri primi" ha probabilità 0 (i.e. è un evento impossibile), il che è piuttosto ovvio: X è un numero naturale, seppur aleatorio. Analogamente, $\mathbb{P}(E_p^c \text{ i.o.}) = 1$ dice che l'evento "X non è divisibile per infiniti numeri primi" ha probabilità 1 (i.e. è un evento certo), che ancora non ci sorprende sempre perché X è un naturale.

Esercizio 4 Z è una v.a. perché somma di due v.a. (la somma di due funzioni misurabili è misurabile). Inoltre, Z assume i valori $x_k + y_j$, al variare di k e j, cioè $E_Z = \{z = x_k + y_j \,:\, x_k \in E_X, y_j \in E_Y\}$, quindi Z è una v.a. discreta. Poi, ricordando che $\Omega = \cup_k \{X = x_k\}$, per $z \in E_Z$,

$$p_Z(z) = \mathbb{P}(Z = z) = \sum_k \mathbb{P}(Z = z, X = x_k) = \sum_k \mathbb{P}(X + Y = z, X = x_k) = \sum_k \mathbb{P}(X = x_k, Y = z - x_k).$$

Ora, poiché X e Y sono indipendenti, $\mathbb{P}(X = x_k, Y = z - x_k) = \mathbb{P}(X = x_k)\mathbb{P}(Y = z - x_k)$, da cui segue che

$$p_Z(z) = \sum_k \mathbb{P}(X = x_k, Y = z - x_k) = \sum_k \mathbb{P}(X = x_k)\mathbb{P}(Y = z - x_k) = \sum_k p_X(x_k) p_Y(z - x_k).$$

Usando $\Omega = \cup_j \{Y = y_j\}$, allo stesso modo si ottiene

$$p_Z(z) = \sum_j p_X(z - y_j) p_Y(y_j).$$