CP1 – ESAME DEL 10 FEBBRAIO 2003

Esercizio 1. *Siano X, Y, Z variabili indipendenti ugualmente distribuite con media 1 e varianza 2. Calcolare*

$$a)\, \mathbb{E}(2X+3Y),\ b)\, \mathrm{Var}(2X+3Y),\ c)\, \mathbb{E}(XYZ),\ d)\, \mathrm{Var}(XYZ)$$

Esercizio 2. *Siano W_1, W_2 due variabili indipendenti geometriche di pareametro p_1, p_2. Calcolare:*
a) $P(W_1 = W_2)$
b) $P(W_1 < W_2)$
c) la distribuzione di $\min(W_1, W_2)$

Esercizio 3. *Sia U una variabile uniforme in $[0,1]$. Calcolare la distribuzione di* $X = \tan(\pi U - \frac{\pi}{2})$

Esercizio 4. *Siano Y, Z due variabili continue con densità congiunta:*

$$f(y,z) = \begin{cases} k(z-y) & \text{per } 0 \le y \le z \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per una qualche constante k. Trovare:
a) la marginale di Y
b) $P(Z < \frac{2}{3} \,|\, Y = \frac{1}{2})$

Esercizio 5. *Si consideri la catena di Markov con spazio degli stati $\Omega = \{1,2,3,4\}$ definita dalle seguenti probabilità di transizione:*

$$P(1 \to 1) = P(4 \to 4) = \alpha\,, \quad P(1 \to 2) = P(4 \to 1) = \beta\,,$$
$$P(2 \to 3) = P(3 \to 4) = 1\,, \qquad \text{dove } \alpha, \beta \ge 0 \text{ e } \alpha + \beta = 1\,.$$

a) Scrivere la matrice di transizione della catena.
b) Osservare che se $\beta = 0$ si hanno almeno due misure invarianti.
c) Calcolare la misura invariante nel caso $\beta > 0$.

Esercizio 6. *Discutere, illustrando con esempi e giustificando i passaggi, due tra i seguenti punti.*

1. *La formula di Bayes e sue applicazioni.*
2. *L'approssimazione Gaussiana della binomiale*
3. *Il teorema ergodico per catene Markov.*