SECONDO ESONERO DI CP1 A.A. 2001-2002

PROF. F. MARTINELLI

Esercizio 1 Y_1, Y_2, Y_3 sono variabili indipendenti e uniformi su $(0,1)$. Sia $X = \max(Y_1, Y_2, Y_3)$. Calcolare la funzione di distribuzione, la densità e la media di X. Come cambiano i risultati se invece del max si prendeva il min ?

Esercizio 2 Siano X, Y due variabili indipendenti esponenziali di parametro $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, calcolare

i) la densità di probabilità di $Z := \min\big(X, Y\big)$

ii) la densità di probabilità e la media di $\sqrt{Z}$.

Esercizio 3 Siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabili indipendenti con distribuzione Gamma(2,1). Dato $\epsilon > 0$ e usando un'opportuna approssimazione Gaussiana, trovare a_n e δ_n in funzione di ϵ tali che

$$\mathbb{P}(|\sum_{i=1}^{n} X_i - a_n| \geq \delta_n) \leq \epsilon$$

per grandi valori di n.

Esercizio 4

i) Siano $X_1, X_2, \dots, X_4$ variabili indipendenti $N(0,1)$. Calcolare $\mathbb{P}(4X_1 + 3X_2 < X_3 + X_4)$.

ii) Siano X, Y variabili indipendenti, la prima uniforme in $(0,1)$ e la seconda Poisson di parametro λ. Calcolare $\mathbb{P}(X < Y)$ e la densità condizionata di X dato l'evento $X < Y$.

Esercizio 5 Sia $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ e si consideri la catena di Markov su Ω definita dalla matrice stocastica

$$P = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ 1-\varepsilon & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 1-\varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon \in (0,1). \tag{0.1}$$

Calcolare la misura invariante. Si denoti con X_n lo stato della catena al tempo n. Calcolare $\mathbb{P}(X_3 = 4|X_0 = 1)$ e $\mathbb{P}(X_3 = 1|X_0 = 4)$. Calcolare infine $\mathbb{P}(X_4 = 4|X_0 = 1)$.

Esercizio 6

(i) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Chebyshev.

(ii) Enunciare e dimostrare la legge dei grandi numeri.

(iii) Date due variabili casuali discrete X, Y con distribuzione congiunta $p(x, y)$, spiegare che cosa si intende con $\mathbb{E}(X \mid Y)$ e dimostrare la formula $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X \mid Y)\big)$.

E-mail address: `martin@mat.uniroma3.it`

Date: June 6, 2002.