Soluzioni

1. Siano X_i, $i = 1, 2, 3$, i risultati del lancio dei tre dadi. Per ogni intero N abbiamo

$$p(N) := \mathbb{P}(X_1 + X_2 + X_3 = N) = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X_1 = i)\mathbb{P}(X_2 = j)\mathbb{P}(X_3 = k)\, 1\!\!1(i + j + k = N)$$

$$= \frac{1}{6^3}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} 1\!\!1(i + j \in \{N - 6, N - 5, \dots, N - 1\})$$

Per $N = 11$: $\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} 1\!\!1(i+j \in \{5, \dots, 10\}) = 27$. Per $N = 12$: $\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} 1\!\!1(i+j \in \{6, \dots, 11\}) = 25$. Quindi $p(11) > p(12)$.

2. Sia Q la moneta da lanciare (scelta a caso). Diremo che $Q = TT$ se la moneta scelta è quella con testa su entrambe le facce, altrimenti scriviamo $Q \neq TT$. Sia X il risultato del lancio di Q. D'ora in poi t sta per testa e c per croce. Nel punto 1 si chiede di calcolare $\mathbb{P}(Q = TT \,|\, X = t)$. Poiché $\mathbb{P}(X = t \,|\, Q = TT) = 1$, si ha

$$\mathbb{P}(Q = TT \,|\, X = t) = \frac{\mathbb{P}(Q = TT)}{\mathbb{P}(X = t)} = \frac{1}{2}\,.$$

Infatti $\mathbb{P}(Q = TT) = \frac{1}{3}$ e

$$\mathbb{P}(X = t) = \mathbb{P}(X = t|Q = TT)\mathbb{P}(Q = TT) + \mathbb{P}(X = t|Q \neq TT)\mathbb{P}(Q \neq TT) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\,.$$

Nel punto 2 si chiede di trovare la moneta TT sulla base della conoscenza di X. Se X è c allora abbiamo prob. $\frac{1}{2}$ di indovinare - scegliendo una a caso tra le due monete rimanenti. Se X è t sappiamo dal punto 1 che $Q = TT$ con prob. $\frac{1}{2}$ quindi conviene scegliere la moneta Q stessa (anziché tentare una delle due rimanenti). In conclusione la prob. cercata è

$$\mathbb{P}(\text{indovinare dopo un lancio}) = \mathbb{P}(\text{trovare TT}|X = c)\mathbb{P}(X = c)$$
$$+ \mathbb{P}(\text{trovare TT}|X = t)\mathbb{P}(X = t) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(X = c) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}(X = t) = \frac{1}{2}$$

3. $U = \min\{X, 1 - X\}$ ha valori in $[0, \frac{1}{2}]$, mentre $V = 1 - U = \max\{X, 1 - X\}$ ha valori in $[\frac{1}{2}, 1]$. Inoltre se $s \in [0, \frac{1}{2}]$ allora

$$\mathbb{P}(U \le s) = \mathbb{P}(\{U \le s\} \cap \{X \le \frac{1}{2}\}) + \mathbb{P}(\{U \le s\} \cap \{X > \frac{1}{2}\}) = \mathbb{P}(X \le s) + \mathbb{P}(1 - X \le s) = 2s\,.$$

Ne deduciamo che U è uniforme in $[0, \frac{1}{2}]$ e V è uniforme in $[\frac{1}{2}, 1]$. Quindi $\mathbb{E}(U) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{E}(V) = \frac{3}{4}$.

La variabile V/U ha valori in $[1, \infty)$. Se $t \ge 1$ si ha (inserendo come sopra gli eventi $\{X \le \frac{1}{2}\}$ e $\{X > \frac{1}{2}\}$)

$$\mathbb{P}(V/U \le t) = \mathbb{P}(1 \le V/U \le t) = \mathbb{P}(1 \le (1 - X)/X \le t) + \mathbb{P}(1 \le X/(1 - X) \le t) = \frac{t - 1}{t + 1}$$

Differenziando rispetto a t si ottiene una densità pari a $\frac{2}{(t+1)^2}$, nell'intervallo $[1, \infty]$, e zero altrove. Quindi $\mathbb{E}(V/U) = +\infty$.

4. Una v.a. di Bernoulli (p) ha media p e varianza $p(1 - p)$, mentre una v.a. di Poisson (λ) ha media λ e varianza λ. Per il teorema del limite centrale le variabili $\widetilde{S}_n = \frac{(S_n - pn)}{\sqrt{np(1-p)}}$ e $\widetilde{W}_n = \frac{(W_n - n\lambda)}{\sqrt{n\lambda}}$ convergono entrambe verso la variabile gaussiana $N(0, 1)$, per $n \to \infty$. Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\widetilde{S}_n \ge 2\alpha) = 1 - \Phi(2\alpha)\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\widetilde{W}_n \ge 2\beta/\sqrt{3}) = 1 - \Phi(2\beta/\sqrt{3})$$

dove $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$. I limiti coincidono se e solo se $\alpha = \beta/\sqrt{3}$.

5. Sia X_n il numero di palline bianche nell'urna A al tempo n. La variabile $X_n \in \{1,2,3\}$ determina univocamente la configurazione del sistema al tempo n. Quindi lo spazio degli stati è $\{1,2,3\}$ e la matrice corrispondente è

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Le equazioni $\sum_{i=1}^{3} \mu_i P_{ij} = \mu_j$, $j = 1,2,3$, con $\mu_j \geq 0$ e $\sum_{j=1}^{3} \mu_j = 1$ hanno l'unica soluzione $\mu_1 = \mu_3 = \frac{1}{5}$ e $\mu_2 = \frac{3}{5}$. Quindi $\mu = (\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$ è la misura invariante della catena. Poiché la catena è *regolare* (si verifica facilmente che $P^2_{ij} > 0$, $i,j = 1,2,3$) possiamo applicare il teorema ergodico per risolvere il punto 2:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(E_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2) = \mu_2 = \frac{3}{5}$$

indipendentemente dallo stato iniziale della catena.