Tutorato di CP1 del 29 Aprile 2002

Dr. Luca Di Persio

Esercizio 1

La durata di una componente elettronica è una v.a. distribuita con legge esponenziale di parametro λ. Supponiamo di avere un macchinario il cui funzionamento dipende dalla componente suddetta, ci chiediamo quale sia la probablità che il macchinario funzioni sino ad un certo tempo t sapendo di aver sostituito la sua componente essenziale esattamente n volte.

Esercizio 2

Un componente elettronico è formato da due elementi, diciamo A e B, la cui durata di funzionamento è una v.a. esponenziale di parametri μ e λ rispettivamente. I due elementi sono montati in serie all'interno del componente elettronico cosicché ,per il corretto funzionamento dello stesso, è necessario che siano funzionanti contemporaneamente. Se indichiamo con T la v.a. corrispondente al tempo di funzionamento del componente tutto intero, quale sarà la sua funzione di densità ? Se montiamo in parallelo al componente A un componente del medesimo tipo, stessa legge di probabilità ancora di parametro λ, miglioriamo la situazione ?
Infine,è preferibile raddoppiare, nel senso appena visto, il componente A oppure quello di tipo B ?

Soluzione Esercizio 1

Come vedremo, per questo problema, è possibile trovare una soluzione elegante facendo uso del Principio di Induzione. Iniziamo con il considerare il caso $n = 2$ e calcoliamo conseguentemente $P(T_1 + T_2 \leq t)$, avremo:

$$P(T_1 + T_2 \leq t) = \int_0^t P(T_1 \in ds)P(T_2 \leq t - s) =$$
$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \left(1 - e^{\lambda(t-s)}\right) ds = 1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)$$

Se ora si aggiunge una terza componente, e quindi un ulteriore tempo che possiamo indicare con T_3 e si definisce $Z \equiv T_1 + T_2$, si può procedere come sopra per ricavare la $P(Z + T_3 \leq t)$. Ciò che si intuisce eseguendo questo ulteriore calcolo è che la legge cercata, in generale, per n componenti ha una forma del tipo:

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} T_k \leq t\right) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

e questo è ciò che accingiamo a dimostrare facendo uso del Principio di Induzione la cui base, n=2, abbiamo mostrato essere vera. Supponiamo quindi che la formula precedente sia valida sino ad n e dimostriamola per n+1:

$$P\left(\sum_{k=1}^{n+1} T_k \leq t\right) = \int_0^t P(T_1 \in ds) P\left(\sum_{k=2}^{n+1} T_k \leq t - s\right) =$$
$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \left(1 - e^{-\lambda(t-s)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(\lambda(t-s)\right)^k}{k!}\right) ds =$$
$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} \frac{\left(\lambda(t-s)\right)^k}{k!} ds = \left(1 - e^{-\lambda t}\right) - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}$$

Per chiarire le idee, supponiamo che il numero di componenti cambiate sia pari a 4, che il parametro λ sia uguale 1000 e che per t valga $t = 2000$ [1], allora avremo:

$$P(\sum_{k=1}^{4} \leq 2000) = 1 - e^{-2}\left(1 + 2 + 2 + \frac{8}{6}\right) \simeq 0.143$$

[1] Evidentemente non ha alcuna importanza l' unitá di misura con la quale indichiamo i vari tempi in esame.

Soluzione Esercizio 2

Definiamo le variabili aleatorie T_1 e T_2 che rappresentano i tempi di vita degli elementi A e B rispettivamente, allora abbiamo che: $T = \min\{T_1, T_2\}$ e quindi [2]:

$$\begin{aligned}
&P(T > t) = P(\min\{T_1, T_2\} > t) = P(T_1 > t, T_2 > t) = \\
&= P(T_1 > t)P(T_2 > t) = e^{-\lambda t}e^{-\mu t} = e^{-(\lambda+\mu)t}
\end{aligned}$$

Se raddoppiamo l' elemento A, dobbiamo calcolare la nuova funzione di densità relativa all' insieme elettronico formato dai due elementi uguali posti in parallelo e ricordare che, in questo caso, affinché tutto l'apparecchio funzioni è sufficiente che funzioni, oltre a B ovviamente, almeno uno tra i due elementi A. Se indichiamo con S_1, S_2 i tempi di funzionamento dei due elementi A ed ancora con T_1 il tempo di funzionamento dell'insieme che compongono, calcoliamo:

$$\begin{aligned}
&F_{T_1}(t) = P(T_1 \leq t) = P(\max\{S_1, S_2\} \leq t) = P(S_1 \leq t, S_2 \leq t) = \\
&P(S_1 \leq t)P(S_2 \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\lambda t}) = (1 - e^{-\lambda t})^2
\end{aligned}$$

Per calcolare la densità di T_1 non ci resta che determinare la derivata di F_{T_1}:

$$f(\tau) = \frac{dF_{T_1}}{dt}(\tau) = 2\lambda e^{-\lambda\tau}(1 - e^{-\lambda\tau})$$

Per concludere possiamo procedere come al punto precedente ottenendo:

$$P(T > t) = 2e^{(-\lambda+\mu)t} - e^{-(2\lambda+\mu)t}$$

ed un valore medio pari a:

$$\frac{2}{\lambda+\mu} - \frac{1}{2\lambda+\mu}$$

Ovviamente la situazione determinata dal raddoppio dei componenti è migliore, dal punto di vista della durata dell'apparecchiatura. Per determinare quale componente raddoppiare, alfine di avere una maggior durata media del nostro dispotivo elettronico, è necessario fissare dei valori per i parametri λ e μ. Se ,ad esempio, poniamo $\lambda = 3$ e $\mu = 1$ e ripetiamo i calcoli appena fatti anche per il raddoppio della componente B, otteniamo facilmente che la situazione più vantaggiosa si realizza con l'agginta di una seconda componente di tipo A.

[2] La funzione che andiamo a calcolare è anche detta *'funzione di sopravvivenza'*.