Tutorato di CP1 del 6 Magggio 2002

Problema 0.0.1. *Sia X una v.a. di densità $f(x)$ definita come:*

$$f(x) \equiv \begin{cases} \mid x \mid & -1 < x < 1 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Determinare la funzione di distribuzione e la densità della v.a. $Y \equiv 1 - \mid X \mid$.

Problema 0.0.2. *Sia X una v.a. di densità :*

$$f(x) \equiv \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x > 1 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Determinare la densità e la media della v.a. $Y \equiv \ln(X)$.

Problema 0.0.3. *Sia X un componente elettronico il cui tempo di vita è una v.a. di tipo esponenziale e di media pari a 2.5 anni. Sapendo che la ditta fornitrice del suddetto componente si impegna a sostituirlo, per garanzia, se esso cessa di funzionare entro due anni dalla data di messa in opera, qual' è la probabilità che la ditta debba effettivamente intervenire ? Quale dovrebbe essere il tempo di garanzia affinché la ditta intervenga in non più del 10% dei casi.*

Problema 0.0.4. *Sia X una v.a. di distribuzione uniforme nell'intervallo $(0,1)$, si vuole calcolare la funzione di ripartizione della nuova variabile aleatoria $Y \equiv 2[X] + 2X$.*

Problema 0.0.5. *Sia $X \sim \Gamma(2, \lambda)$, ovvero la densità di X è data dalla seguente funzione:*

$$f(x) \equiv \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Qual'è la legge della v.a. $Y \equiv [X]$.

Problema 0.0.6. *Sia X una v.a. assolutamente continua di densità f. Calcolare la densità della v.a. $Y \equiv aX + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.*

Problema 0.0.7. *Sfruttando il risultato ottenuto nell esercizio precedente cosa si può dire per la v.a. Y, definita come in predenza, qualora X sia una v.a. distribuita secondo una gaussiana di media μ e varianza σ^2 ?*

Soluzioni

Soluzione 0.0.1. *Se il valore $y \notin [0,1]$, allora:*

$$P(Y \leq y) = P(1- \mid X \mid \leq y) = P(\mid X \mid \geq 1-y) = 0$$

altrimenti abbiamo:

$$P(Y \leq y)) = 2P(X \geq 0, X \geq 1-y) = 2\int_{1-y}^{1} x dx = 1-(1-y)^2$$

Per quanto riguarda la densità della v.a. Y si ottiene banalmente:

$$g(y) = \begin{cases} 2(1-y) & y \in [0,1] \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Soluzione 0.0.2. *Per ipotesi la variabile aleatoria X prende esclusivamente valori più grandi di 1, ne viene che $Y > 0$ ed inoltre:*

$$P(Y \leq y) = P(\log X \leq y) = P(X \leq e^y) = \int_1^{e^y} \frac{1}{t^2} dt$$

Derivando si ottiene (per $y > 0$) :

$$P(Y \leq y) = \frac{1}{e^{2y}} e^y = \frac{1}{e^y}$$

da cui $Y \sim EXP(1)$ e quindi la sua media è pari ad 1. Notiamo che, poiché la funzione di ripartizione della Y non è definita per ogni valore, si dovrebbe verificare che :

$$P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f(t)dt = \int_{-\infty}^{y} e^{-t} dt = -e^{-y}$$

Per effettuare la derivazione della funzione di ripartizione, alfine di calcolare la densità della v.a. in esame, si può anche procedere calcolando esplicitamente la primitiva e quindi derivando, tuttavia non sempre questa strada è percorribile ed in ogni caso risulta più agevole fare uso del Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

Soluzione 0.0.3. *Per ipootesi $T \sim EXP(\lambda)$, sapendo che $\mathbb{E}[T] = 2.5$ otteniamo $\lambda = 0.4$; ne viene che:*

$$P(T \leq 2) = \int_0^2 0.4 e^{-0.4x} dx = 1 - e^{-0.8}$$

Per il secondo quesito, indicando con t il tempo cercato, abbiamo che deve essere:

$$P(T \leq t) \leq \frac{1}{10}$$

e quindi:

$$1 - e^{-0.4t} \leq \frac{1}{10} \to t \leq 2.5 \log \frac{10}{9}$$

Soluzione 0.0.4. *Inziamo con il calcolare la funzione di ripartizione per la v.a. Y:*

$$P(Y \leq t) = P(Y \leq t, X < 1) + P(Y \leq t, X = 1) = P(2X \leq t, X < 1)$$

dove abbiamo usato il fatto che $P(X = 1) = 0 = P(Y \leq t, X = 1)$. Essendo ovviamente:

$$P(2X \leq t, X < 1) = P(X \leq \frac{t}{2}, X < 1)$$

otteniamo che la densità della v.a. Y non è altro che quella di una v.a. uniforme in $(0, 2)$, ovvero la Y si distribuisce come $2X$.

Soluzione 0.0.5. *Sia $n \in \mathbb{Z}$, allora affinché sia $Y = n$ deve essere necessariamente $n \leq X < n + 1$, inoltre X è definita solamente per valori positivi, ne viene che $Y \geq 0$, quindi $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha:*

$$P(Y = y) = \int_n^{n+1} \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx = (-\lambda x + 1)e^{-\lambda x} \mid_n^{n+1}$$

Soluzione 0.0.6. *Calcoliamo la funzione di ripartizione della v.a. Y :*

$$P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P(aX \leq Y - b)$$

se $a > 0$ allora si ha:

$$P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} f(x)dx \to g(y) = \frac{1}{a} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

se $a < 0$ allora:

$$P(Y \leq y) = 1 - \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} f(x)dx \to g(y) = -\frac{1}{a} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Soluzione 0.0.7. *Sfruttando la soluzione data al punto precedente si ottiene immediatamente che $Y \sim N\left(a\mu + b, (\mid a \mid \sigma)^2\right)$.*