Tutorato di CP1 del 22 Aprile 2002

Dr. Luca Di Persio

Esercizio 1

I Pezzi meccanici prodotti da una certa linea di produzione devono avere una lunghezza nominale di 20cm. ; sono accettabilli pezzi aventi lunghezza entro i limiti di tolleranza [19.5,20.5]. Le lunghezze reali dei pezzi sono in realtà delle v.a. con distribuzione normale di media 20cm e varianza $(0.25)^2 cm^2$.

1) Quale percentuale di pezzi non rispetta i limiti di tolleranza dati ?

2) Potendo ricalibrare la linea di produzione, a quale valore dobbiamo ridurre la varianza affinché la percentuale di pezzi che rispettano i limiti di tolleranza sia pari al 99% ?

Esercizio 2

L'altezza degli uomini di una determinta città ha legge normale di parametri $\mu = 178cm$ e deviazione standard $\sigma = 10cm$. Mentre quella delle donne ha legge normale di parametri $\mu = 168cm$ e deviazione standard $\sigma = 15cm$. Inoltre le donne costituiscono il 58% della popolazione totale della città in oggetto di indagine.

1) Qual'è la probabilità che l'altezza di una abitante della città, mascherato, fermato a caso ad un angolo della strada in un giorno di carnevale, sia compresa tra 165 e 180 cm. ?

2) Se l'altezza della persona mascherata fermata a caso è compresa tra 165 e 180 cm. , qual'è la probabilità che la persona fermata sia un uomo.

Esercizio 3

Siano $X_1, \ldots, X_n$ v.a. i.i.d. tali che $\mathbb{E}[X_i] = \mu = 80$ e $Var[X_i] = \sigma = 36$. Sia inoltre $X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1) Usando la disguaglianza di Chebychev, determinare due valori q_1 e q_2 tali che $P(q_1 < X_1 < q_2) \geq 0.91$.

2) Sulla base della risposta precedente , per quali valori di q si verifica che $P(X_1 > q) \geq 0.91$?

3) Usando nuovamente la disguaglianza di Chebychev, determinare per quali valori di n si ha $P(79.98 < X < 80.02) \geq 0.91$.

4) Se abbiamoo l'ulteriore informazione che X_1 (e quindi anche $X_2, \ldots, X_n$) segue una distribuzione normale, come cambia la risposta al punto 3 ?

Soluzione Esercizio 1

Definiamo una nuova variabile aleatoria (standardizzata): $Z \equiv \frac{X-\mu}{\sigma}$.
Per il primo punto avremo:

$$P(\{X < 19.5\} \cup \{X > 20.5\}) =$$
$$= P(X < 19.5) + P(X > 20.5) = P\left(Z < \frac{19.5-20}{0.25}\right) + P\left(Z > \frac{20.5-20}{0.25}\right) =$$
$$P(Z < -2) + P(Z > 2) = 2\,(1 - \Phi(2)) \simeq 2 \cdot 0.02275 = 0.04550 = 4.55\%$$

Mentre per il secondo punto, imponendo:

$$0.99 = P(19.5 \leq X \leq 20.5) = P\left(-\frac{0.5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{0.5}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{0.5}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{0.5}{\sigma}\right) - 1$$

otteniamo:

$$\Phi\left(\frac{0.5}{\sigma}\right) = 0.995, \qquad \frac{0.5}{\sigma} \simeq 2.57583, \qquad \sigma \simeq \frac{0.5}{2.57583} \simeq 0.194$$

cosicchè la varianza richiesta è: $0.194^2 = 0.37636 cm^2$.

Soluzione Esercizio 2

Sia $X \backsim N(178, 100)$ l'altezza deglil uomini, $Y \backsim N(168, 225)$ l'altezza delle donne, E$\equiv$ {l'altezza di una persona fermata a caso in un angolo di una strada il giorno di carnevale con una maschera sul viso è compresa fra 164 e 180 cm} ed infine definiamo $H \equiv$ {Una persona scelta a caso nella città è un uomo }. Avremo, per il primo punto, utilizzando il teorema delle probablità totali:

$$P(E) = P(E \mid H)P(H) + P(E \mid H^c)P(H^c)$$

Dai dati del problema abbiamo $P(H) = 0.42$.
Inoltre:

$$P(E \mid H) = P(X \in [164, 180]) = \phi\left(\frac{180-178}{10}\right) - \phi\left(\frac{165-178}{10}\right) =$$
$$= \phi(0.2) - \phi(-1.3) = 0.5793 - 0.0968 = 0.4285$$

mentre:

$$P(E \mid H^c) = P\left(Y \in [164, 180]\right) = \phi\left(\frac{180-168}{15}\right) - \phi\left(\frac{165-168}{15}\right) =$$
$$= \phi(0.8) - \phi(-0.2) = 0.7881 - 0.4207 = 0.3674.$$

Quindi: $P(E) = 0.4825 \cdot 0.42 + 0.3674 \cdot 0.58 = 0.4157$.
Per il secondo punto basta ricordare la formula di Bayes per ottenere che :

$$P(H \mid E) = \frac{P(E \mid H)P(H)}{P(E)} = 0.4825 \cdot \frac{0.42}{0.4157} = 0.4875$$

Soluzione Esercizio 3

1)Sfruttando la disuguaglianza di Chebychev abbiamo:

$$P\left(\mid X_1-\mu\mid<\sigma\delta\right)>1-\frac{1}{\delta^2}=0.91$$

da cui otteniamo, ricordando che $\delta>0$, $\delta=\frac{1}{\sqrt{0.09}}=\frac{10}{3}$ e quindi:

$$q_1=\mu-\sigma\delta=60 \quad , \quad q_2=\mu+\sigma\delta=100$$

2) Essendo $P(60<X_1)\geq P(60<X_1<100)\geq 0.91$, posso scegliere $q\leq 60$.
3) Essendo 80 anche la media di X, possiamo applicare nuovamente la disuguaglianza di Chebychev ottenendo:

$$\begin{aligned}&P(79.98<X<80.02)P(-0.02<X-\mu<0.02)=\\&=P\left(-0.02\frac{\sqrt{n}}{\sigma(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})}<X<0.02\frac{\sqrt{n}}{\sigma(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})}\right)\geq\\&\geq 1-\frac{1}{0.02^2\cdot\frac{n}{\sigma^2}}\end{aligned}$$

Avendo applicato la disuguaglianza di Chebychev con $\delta=0.02\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$ ed essendo $\frac{\sigma^2}{n}=\frac{36}{n}$ la varianza della X. Imponendo ora che: $1-\frac{\sigma^2}{0.02^2\cdot n}\geq 0.91$, la disequazione:

$$P(79.98<X<80.02)\geq 0.91$$

è soddisfatta per ogni $n\geq 10^6$.
4) Se le variabili aleatorie $X_1,\ldots,X_n$ sono distibuite secondo una legge gaussiana, allora $X\backsim N\left(80,\frac{36}{n}\right)$. Ne viene che:

$$P(79.98<X<800.02)=2\Phi\left(0.02\cdot\frac{\sqrt{n}}{6}\right)-1=2\Phi\left(10^{-2}\cdot\frac{\sqrt{n}}{3}\right)-1\geq 0.91$$

se e solo se $\Phi\left(10^{-2}\cdot\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\geq 0.955$ se e solo se $10^{-2}\cdot\frac{\sqrt{n}}{3}\geq 1.70$,per la monotonia stretta della funzione di ripartizione della normale $N(0,1)$; cosicchè concludiamo che deve essere: $n\geq 152550$, ottenendo cosí per n un valore inferiore, come era da aspettarsi, a quello ricavato al punto precedente.