Tutorato di CP1 del 20 Maggio 2002

Dr. Luca Di Persio

Esercizio 1

Sia (X,Y) una v.a. , bidimensionale, a valori in $\mathbb{R}^2$ ed avente funzione di densità :

$$p(x,y) \equiv \begin{cases} \frac{cy}{1+y^2} & 0 \leq y \leq 1 \ , \ y^2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Determinare:

a) La costante c.

b) Trovare le distribuzioni marginali.

c) Dire se le v.a. X ed Y sono o meno dipendenti.

Esercizio 2

La durata di un componente elettronico è una v.a. esponenziale di parametro λ essendo questo il valore preso da un certo elemento Λ, che quindi influenza il funzionamento del componente stesso, ma sul quale non è possibile alcun controllo e che, quindi, consideriamo come un v.a. che supponiamo seguire una distribuzione $U(0,1)$. Indicato con Y il tempo di vita del componente si risponda alle seguenti domande:

a) Qual' è la densità congiunta delle v.a. Y e Λ ?

a) Qual' è la legge di Y ?

a) La v.a. Y ha speranza matematica finita ?

Esercizio 3

Sia (X,Y) una coppia di v.a. dotata di densità congiunta:

$$f(x,y) \equiv \begin{cases} \alpha x & (x,y) \in S \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

essendo $S \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x+y \leq 3 \ , \ -1 \leq y-x \leq 1\}$. Si risolvano i seguneti punti:

a) Stabilire il valore del parametro α affinché $f(x,y)$ sia effettivamente una funzione di densità.

b) Si calcolino le funzioni di ripartizione, marginali, delle v.a. X ed Y rispettivamente.

c) Si dica se le v.a. X ed Y sono tra di loro indipendenti.

d) Si determini la probabilità che la coppia (X,Y) prenda valori nella zona del piano reale $A \equiv \{(x, y) \in [0, +\infty) \times [1, 2]\}$.

e) Si determini la probablità dell'evento $\{Y \geq 1\}$ sapendo che si è verificato l'evento $\{X \geq 1\}$.

Soluzione Esercizio 1

Per la determinazione della costante c basta osservare che:

$$1 = \int_0^1 p(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_{y^2}^1 \frac{cy}{1+y^2}dxdy = \int_0^1 \frac{cy\left(1-y^2\right)}{1+y^2}dy =$$
$$= c\left(\log 2 - \frac{1}{2}\right) \rightarrow c = \left(\log 2 - \frac{1}{2}\right)^{-1}$$

Per quanto riguarda le distribuzioni marginali della X e della Y, otteniamo subito:

$$p_X(x) = \begin{cases} \int_0^{\sqrt{x}} p(x,y)dy = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{cy}{1+y^2}dy = \frac{c}{2}\log\left(1+x\right) & x \in [0,1] \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Mentre la marginale della v.a. Y sarà:

$$p_Y(y) = \begin{cases} \int_{y^2}^1 p(x,y)dx = c\frac{y\left(1-y^2\right)}{1+y^2} & y \in [0,1] \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Ne viene che le due v.a. X ed Y sono dipendenti non essendo rispettata la condizione $p_X(x)p_Y(y) = p(x,y)$.

Soluzione Esercizio 2

Il testo del problema ci dice che Y è una v.a. esponenziale di parametro λ fissato una volta che tale valore lo si sia estratto con distribuzione $U(0,1)$, quindi:

$$f_{Y|\Lambda}(y \mid \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & y > 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

mentre, ovviamente, per la v.a. Λ si ha :

$$f_\Lambda(\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda \in (0,1) \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Poiché la densità congiunta della coppia (Y, Λ) è il prodotto delle densità $f_{Y|\Lambda}$ e f_Λ, avremo :

$$f_{(Y,\Lambda)}(y,\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \lambda \in (0,1)\ ,\ y > 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Per rispondere al punto (b) basta calcolare:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(Y,\Lambda)}(y,\lambda)d\lambda = \begin{cases} \int_0^1 \lambda e^{-\lambda y}d\lambda & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

Si può procedere integrando per parti cosí da ottenere:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \lambda e^{-\lambda y} d\lambda &= -\frac{\lambda}{y} e^{-\lambda y} \mid_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{y} e^{-\lambda y} d\lambda = \\ &= -\frac{1}{\lambda} e^{-y} - \left(\frac{1}{y^2} e^{-\lambda y} \mid_0^1 \right) = \\ &= -\frac{1}{y} e^{-y} - \frac{1}{y^2} e^{-y} + \frac{1}{y^2}\end{aligned}$$

Infine, per quanto riguarda il terzo punto, la v.a. Y ha speranza finita sse:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mid y \mid f_Y(y) dy < +\infty$$

Se $y \leq 0$ non vi sono problemi essendo ivi la densità della v.a. identicamente nulla, nel caso $y > 0$, ricordando che:

$$\lim_{y \to 0^+} \frac{1 - e^{-y}}{y} = 1$$

otteniamo che la funzione integranda è limitata nell' intorno dell' origine, tuttavia il termine $\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}$ è integrabile in $(0, \delta)$, $\delta > 0$ sse $\alpha > 1$, dunque Y non ha speranza matematica finita.

Soluzione Esercizio 3

La risposta al primo quesito è standard e si ha:

$$\begin{aligned}1 = \int_S f(x,y) dx dy &= \alpha \left[\int_0^2 x \left(\int_{-1}^1 dy \right) dx + \int_1^2 x \left(\int_{x-1}^{3-x} dy \right) dx \right] = \\ &= \alpha \left[\int_0^1 2x^2 dx + \int_1^2 (4x - 2x^2) dx \right] = 2\alpha\end{aligned}$$

da cui: $\alpha = \frac{1}{2}$. La marginale della v.a. X sarà

$$f_X(x) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{1-x}^{1+x} x dy = x^2 & x \in [0,1] \\ \frac{1}{2} \int_{x-1}^{3-x} x dy = 2x - x^2 & x \in [1,2] \\ 0 & x \notin [0,2] \end{cases}$$

mentre per la v.a. Y otteniamo:

$$f_Y(y) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{1-y}^{1+y} x dx = y & y \in [0,1] \\ \frac{1}{2}\int_{y-1}^{3-y} x dx = 2-y & y \in [1,2] \\ 0 & y \notin [0,2] \end{cases}$$

Avendo calcolato le marginali di entrambe le v.a. X ed Y possiamo facilmente dedurre come esse non siano indipendenti, infatti la condizione $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ non è rispettata. La risposta al punto (d) si risolve in:

$$\mathbb{P}\left(\{(X,Y) \in A\}\right) = \int_A \frac{x}{2} dx dy = \int_1^2 \left(\int_1^{3-x} \frac{x}{2} dy\right) dx = \frac{1}{3}$$

Infine per risolvere l' ultimo quesito calcoliamo innanzitutto:

$$\mathbb{P}\left(\{X \geq 1\}\right) = \int_1^2 (2x - x^2) dx = \frac{2}{3}$$

da cui posso ricavare che:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(\{Y \geq 1 \mid X \geq 1\}\right) = \\ &= \frac{\mathbb{P}\left(\{Y \geq 1, X \geq 1\}\right)}{\mathbb{P}\left(\{X \geq 1\}\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(\{(X,Y) \in A\}\right)}{\mathbb{P}\left(\{X \geq 1\}\right)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$