Tutorato di CP1 del 13 Magggio 2002

Problema 0.0.1. *Sia X una v.a. di densità $f(x)$ definita come:*

$$f(x) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Determinare la funzione di distribuzione della v.a. $Y \equiv \cos(X)$.

Problema 0.0.2. *Siano X ed Y due v.a. di densità congiunta:*

$$p(x,y) \equiv \begin{cases} cye^{-yx} & x \geq 0\,,\ 0 \leq y \leq 10 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dterminare la costante reale c. Calcolare le denisità marginali di X ed Y e dire se queste due v.a. sono indipendenti. Calcolare la densità della somma $X+Y$.

Problema 0.0.3. *Siano M ed H due v.a. indipendenti, entrambe con distribuzione esponenziale di parametro λ. Sia poi data una parabola con asse verticale passante per l'origine e tale che :*

- *M è il coefficiente angolare della tangente nell' origine.*
- *H è la quota del vertice.*

Sia X la coordinata del punto (diverso dall' origine) in cui la parabola interseca l' asse delle ascisse. Trovare la distribuzione di X.

Soluzione 0.0.1. *Calcoliamo innanzitutto la funzione di distribuzione per la v.a. Y :*

$$P(Y \leq y) = P(\cos X \leq y) = \begin{cases} 1 & y \geq 1 \\ 0 & y < -1 \\ F_Y(y) & -1 \leq y < 1 \end{cases}$$

Determiniamo la funzione $F_Y(y)$, facendo attenzione al grafico della funzione $\cos(x)$ *:*

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(X \leq -\arccos y) + P(X \geq \arccos y) = \\ &= \int_{-\infty}^{-\arccos y} p(x)dx + \int_{\arccos y}^{\infty} p(x)dx = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\arccos y} \frac{1}{\pi}dx + \int_{\arccos y}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi}dx = \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos y\right) \end{aligned}$$

Soluzione 0.0.2.

$$\int_{\mathbb{R}^2} p(x,y)dxdy = 1 = \int_0^{10}\int_0^{\infty} cye^{-yx}dxdy = \int_0^{10} cdy = 10c$$

e quindi otteniamo: $c = \frac{1}{10}$. Calcoliamo le densità marginali di X ed Y:

$$p_X(x) = \mathbb{I}_{\{x \geq 10\}} \int_0^{10} \frac{1}{10} ye^{-yx}dy = \mathbb{I}_{\{x \geq 10\}} \frac{1}{10x^2}[1 - 10xe^{-10x} - e^{-10x}]$$

mentre per la v.a. Y abbiamo:

$$p_Y(y) = \mathbb{I}_{\,0 \leq y \leq 10} \int_0^{\infty} cye^{-yx}dx = \frac{1}{10}$$

dal calcolo delle marginali si evince che le due variabili non sono indipendenti. Se ora indichiamo con $f(z)$ la densità della variabile aleatoria $Z \equiv X + Y$, allora avremo, per $x \geq 0$:

$$f(z) = \int_0^{z\wedge 10} p(z-y,y)dy = \int_0^{z\wedge 10} \frac{1}{10} ye^{-y(z-y)}dy = \frac{1}{10}\int_0^{z\wedge 10} ye^{-zy+y^2}dy$$

L'ultimo integrale non si esprime in forma chiusa, ovvero non è possibile trovare una primitiva in forma esplcita che sia soluzione del problema, tuttavia si può sempre osservare che:

$$\int_0^{\infty} f(z)dz = \int_0^{\infty}\int_0^{z\wedge 10} ye^{-zy+y^2}dy = 1$$

Soluzione 0.0.3. *Una parabola con asse verticale e passante per l' origine ha un' equazione generale del tipo:*

$$y = ax^2 + bx$$

La prima condizione è equivalente a $y'(0) = M$ *e quindi si ha:* $b = M$. *Per quanto riguarda la seconda condizione osserviamo che il vertice è il punto la cui ascissa* x_y *è determinata dalla condizione* $y'(x_y) = 0$, *che nel caso attuale diviene:*

$$2ax_y + M = 0 \rightarrow x_y = \frac{M}{2a}$$

La seconda equazione diventa allora:

$$H = y(x_y) = -\frac{M^2}{4a} \rightarrow a = \frac{M^2}{4H}$$

L'equazione della prabola è : $y = \frac{M^2}{4H}x^2 + Mx$, *da cui si deriva che* $X = 4\frac{H}{M}$
È evidente che $P(X) = 0$ *se* $x \leq 0$. *Sia allora* $x > 0$, *avremo:*

$$P(X) = P(H \leq \frac{x}{4}M) = \int_{\{0 \leq h \leq \frac{x}{4}m < +\infty\}} \lambda^2 e^{-\lambda h} e^{-\lambda m} dh\, dm$$

ovvero:

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda m} \left(\int_0^{\frac{x}{4}m} \lambda e^{-\lambda h} dh \right) dm = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda m} \left(1 - e^{-\lambda \frac{x}{4} m}\right) dm = \frac{x}{4+x}$$

Si tratta, quindi, di una distribuzione cui corrisponde la densità:

$$P_X(x) \equiv \begin{cases} \frac{4}{(4+x)^2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$