SOLUZIONI I ESONERO CP1 A.A. 2001-2002

Esericizio # 1

La classe, chiamiamola $\mathscr{S}$, di tutti i sottoinsiemi di $S = \{1, 2, \ldots, N\}$ ha cardinalitá pari a 2^N. Scelti k elementi di S per creare l' insieme A, scelta che posso effettuare in $\binom{N}{k}$ modi diversi, ho a disposizione $N - k$ elementi, distinti da quelli che compongono A, con i quali costruire un insieme B tale che $A \cap B = \emptyset$, ne viene che di B siffatti ne posso avere esattamente 2^{N-k} cosicché: $P(\{A \bigcap B = \emptyset\}) = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{2^{N-k}}{4^N} = \left(\frac{3}{4}\right)^N$

Esericizio # 2

i)

Nelle prime n-1 partite ho avuto solamente un 4 od un 5. Sia $n_5 = \#5$ nei primi n-1 lanci e definiamo la variabile aleatoria X_i come il risultato all' i-esimo lancio. Allora avremo:

$$P(n_5 = k \mid n\ partite) = \frac{P(\{n_5 = k\} \bigcap \{X_i \in \{4,5\}, i = 1, \ldots, n-1\} \bigcap \{X_n \notin \{4,5\}\})}{P(\{X_i \in \{4,5\}, i = 1, \ldots, n-1\} \bigcap \{X_n \in \{4,5\}\})} =$$

$$= \frac{P(\{n_5 = 4\}, \{n_4 = n-1-k\}, \{X_n \notin \{4,5\}\})}{P(\{X_i \in \{4,5\}, i = 1, \ldots, n-1\}, \{X_n \notin \{4,5\}\})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{6}^{n-1} \frac{2}{3}}{\frac{1}{3}^{n-1} \frac{2}{3}} \binom{n-1}{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \binom{n-1}{k}$$

ii)

Sia $\nu \equiv$ il tempo minimo che occorre attendere prima di osservare una vittoria da parte di una qualsiasi delle 3 amiche. Allora avremo:

$$P(\{A \mid \nu = n\}) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{6}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$$

iii)

La variabile aleatoria ν é geometrica di parametro $\frac{2}{3}$.

Esericizio # 3

i)

Sia X il colore della prima pallina ed Y quello della seconda e simboleggiamo i colori bianco con 'b' e nero con 'n'. Allora avremo:

$$P(X = n \mid Y = b) = \frac{P(\{Y = b \mid X = n\}) P(\{X = n\})}{P(\{X = n\}) P(\{Y = b \mid X = n\}) + P(\{Y = b \mid X = b\}) P(\{X = b\})}$$

Ora:

$P(\{X = n\}) = \frac{6}{10}$, $P(\{Y = b \mid X = n\}) = \frac{4}{13}$, $P(\{Y = b \mid X = b\}) = \frac{7}{13}$

quindi:

$$P(\{X = n \mid Y = b\}) = \frac{\frac{4}{13} \frac{6}{10}}{\frac{4}{13} \frac{6}{10} + \frac{7}{13} \frac{4}{10}} = \frac{6}{13}$$

ii)

Calcoliamo:

$$P(\{X = n\} \bigcap \{Y = n\}) = P(\{Y = n\} \mid \{X = n\}) P(\{X = n\}) = \frac{9}{13} \frac{6}{10}$$

Sappiamo che $P(\{X = n\}) = \frac{6}{10}$ ed inoltre:

$$P(\{Y = n\}) = \frac{9}{13}\frac{6}{10} + \frac{6}{13}\frac{4}{10}$$

e quindi :

$$P(\{X = n\}, \{Y = n\}) \neq P(\{X = n\})P(\{Y = n\})$$

Esericizio # 4

i)

Sia ξ la v.a. che indica il numero di vittorie in un anno. Considerando le 52 settimane presenti in un anno ho: $\mathbb{E}(\xi) = \frac{52}{100} = 0.52$ e quindi:

$$P(\{\xi \geq 3\}) = 1 - P(\{\xi \leq 2\}) \simeq 1 - e^{-0.52} - e^{-0.52}0.52$$

infatti la v.a. che ci interessa e' distribuita secondo la legge di *Poisson* che qui sviluppiamo sino al secondo ordine.

ii)

Sia S la v.a. indicante il patrimonio del giocatore alla fine dell' anno e x il costo di un singolo biglietto della lotteria, allora:

$$S = 100\xi - 52x \rightarrow \mathbb{E}(S) = 52 - 52x$$

Esericizio # 5

i)

In accordo con le definizioni date nel testo ed essendo $n_3 = n - n_1 - n_2$, abbiamo:

$$P(\{X = n_1\}, \{Y = n_2\}, \{Z = n_3\}) = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_2}{n_2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n_1+n_2+n_3} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

ii) $X \backsim B(n, \frac{1}{3})$

iii) $X + Y \backsim B(n, \frac{2}{3})$

iv) Innanzitutto: $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{3}$ poi abbiamo:

$$\begin{aligned}2\mathbb{E}(XY) =& \mathbb{E}(X+Y)^2 - \mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}Y^2 = \mathbb{E}(X+Y)^2 - [\mathbb{E}(X+Y)]^2 + (\mathbb{E}(X))^2 + (\mathbb{E}(Y))^2 + \\ &+ 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2) = Var(X+Y) - Var(X) - Var(Y) + 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \\ &= n\frac{2}{3}\frac{1}{3} - n\frac{1}{3}\frac{2}{3} - n\frac{1}{3}\frac{2}{3} + 2n^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\end{aligned}$$

Da cui: $\mathbb{E}(XY) = (n^2 - n)\frac{1}{9}$.

v)

$P(\{X + Y \geq 0.8n\}) = P(\{X + Y \geq \mathbb{E}(X+Y)\}) \leq \frac{2}{3}\frac{n}{0.8n} = \frac{2}{3}\frac{10}{8} = \frac{5}{6}$