CAM - Complementi di analisi matematica

Corso di laurea in matematica - Anno 2001/2002

15 Marzo 2002

Tutorato II

Esercizi.

Risolvere i seguenti integrali indefiniti:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int x^{1/8} e^{x^{1/16}}\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int \frac{3^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} ax \ \cos ax}{b\cos^2 ax + c\operatorname{sen}^2 ax}\,\mathrm{d}x$ con $a \neq 0,\ b > 0,\ c > 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-\tanh x}}\,\mathrm{d}x$ dove $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+1}\,\mathrm{d}x$

Soluzioni.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{(1-\operatorname{sen}^2 x)^2}\,\mathrm{d}x$

ponendo $t = \operatorname{sen} x$ si ha

$$\int \frac{1}{(1-t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

che é un integrale di funzioni razionali ed é quindi di facile (speriamo!) risoluzione.

2. Posto $t = x^1/16$, risulta $x = t^16$ e $\mathrm{d}x = 16\, t^{15}\ \mathrm{d}t$. Perció il nostro integrale diventa

$$16 \int t^{17} e^t\ \mathrm{d}t$$

che si puó risolvere integrando piú volte per parti.
Non é difficile vedere che in generale

$$J_n = \int t^n e^t\ \mathrm{d}t = e^t \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, t^{n-k}\, n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$$

dove il simbolo $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$ si intende sostituito da 1 quando $k = 0$.

3. Posto $t = \sqrt{x}$ si ha $x = t^2$ e $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. Perció

$$\int \frac{3^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{\left(3^{\sqrt{2}}\right)^t}{t}\, 2t\ \mathrm{d}t = 2 \int \left(3^{\sqrt{2}}\right)^t\ \mathrm{d}t = 2\, \frac{\left(3^{\sqrt{2}}\right)^t}{\log\left(3^{\sqrt{2}}\right)} + c$$

4. Posto $t = ax$, si ha

$$\int \frac{\operatorname{sen} ax\ \cos ax}{b \cos^2 ax + c \operatorname{sen}^2 ax}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int \frac{\operatorname{sen} t\ \cos t}{b \cos^2 t + c \operatorname{sen}^2 t}\ \mathrm{d}t$$

e osservando che $D\left(b \cos^2 t + c \operatorname{sen}^2 t\right) = 2(c-b) \operatorname{sen} t\ \cos t$ si ha

$$\frac{1}{a} \int \frac{\operatorname{sen} t\ \cos t}{b \cos^2 t + c \operatorname{sen}^2 t}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{a} \int \frac{D\left(b \cos^2 t + c \operatorname{sen}^2 t\right)}{2(c-b)(b \cos^2 t + c \operatorname{sen}^2 t)}\ \mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{2a(c-b)} \log\left(b \cos^2 t + c \operatorname{sen}^2 t\right) + k$$

Se $c = b$ si ha invece

$$\frac{1}{a}\int \frac{\operatorname{sen} t \cos t}{b\cos^2 t + c\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{ab}\int \operatorname{sen} t\cos t\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{4ab}\cos 2ax + k$$

5. Ricordando che $\tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ si ha

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\tanh x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \sqrt{e^{2x}+1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \sqrt{e^t+1}\ \mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{u+1}}{u}\,\mathrm{d}u$$

avendo posto successivamente $t = 2x$ e $u = e^t$. Posto ancora $v = \sqrt{u+1}$ si ricava $u = v^2 - 1$ e quindi

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{u+1}}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{v}{v^2-1}\,2v\ \mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{v^2}{v^2-1}\,\mathrm{d}u =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1}\right)\right]\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}v + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{v-1}{v+1}\right| + c$$