CAM - Complementi di analisi matematica

Corso di laurea in matematica - Anno 2001/2002

8 Marzo 2002

Tutorato I

Esercizi.

Risolvere i seguenti integrali indefiniti:

1. $\displaystyle\int \frac{x+7}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int \frac{x^4+6x^2+12x+15}{(2x+1)(x^2+3)^2}\,\mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\int x\,e^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$

Soluzioni.

1. $\displaystyle\int \frac{x+7}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+7}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$

Ora scomponiamo l'integrando e otteniamo

$$\frac{x+7}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax+2A+Bx+B}{(x+1)(x+2)}$$

da cui $A = 6$ e $B = -5$. Si ha allora

$$\int \frac{x+7}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{6}{x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{5}{x+2}\,\mathrm{d}x = 6\log|x+1| - 5\log|x+3| + c$$

2. Il polinomio $(x^2 - 2x + 2)$ non può essere fattorizzato. Per prima cosa cerchiamo quindi di ottenere al numeratore la derivata del denominatore, scrivendo cioè

$$\int \frac{2x+5}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \quad {}^{(\alpha)}\!\!\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x + \quad {}^{(\beta)}\!\!\int \frac{7}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$$

Ora

$$\alpha = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \log|x^2-2x+2| + c_1$$

mentre

$$\beta = \int \frac{7}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{7}{(x^2-2x+1)+1}\,\mathrm{d}x = 7\int \frac{1}{(x-1)^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 3\,\mathrm{arctg}\,(x-1) + c_2$$

3. Scomponiamo l'integrando e otteniamo

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Bx+Cx+C}{(x+1)(x^2+1)}$$

da cui $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ e $C = \frac{1}{2}$.

Quindi si ha che

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\;{}^{(\alpha)}\!\!\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\;{}^{(\beta)}\!\!\int \frac{x-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Ora

$$\alpha = \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \log|x+1|$$

mentre

$$\beta = \int \frac{x-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+1| - \operatorname{arctg} x$$

Riassumendo

$$\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log|x+1| - \frac{1}{4}\log|x^2+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c$$

4. Scomponiamo la frazione da integrare nel seguente modo

$$\frac{x^4+6x^2+12x+15}{(2x+1)(x^2+3)^2} = \frac{A}{2x+1} = \frac{Bx+C}{x^2+3} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{Dx+E}{x^2+3}\right)$$

Si ha allora, eliminando i denominatori, l'identità

$$\begin{aligned} x^4+6x^2+12x+15 = {} & A(x^2+3)^2 + (Bx+C)(2x+1)(x^2+3) \\ & + [D(x^2+3) - 2x(Dx+E)](2x+1) \end{aligned}$$

Il secondo membro di questa equazione si semplifica in

$$(A+2B)x^4 + (B+2C-2D)x^3 + (6A+6B+C-D-4E)x^2$$
$$+ (3B+6C+6D-2E)x + (9A+3C+3D)$$

Dal sistema di cinque equazioni in cinque incognite si ottiene

$$A = C = D = 1, \qquad B = E = 0$$

Alla fine quindi

$$\int \frac{x^4+6x^2+12x+15}{(2x+1)(x^2+3)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+3}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x/\sqrt{3})^2+1}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\log|2x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{x}{x^2+3} + c$$

5. Integriamo per parti considerando $g'(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = x^2$. Si ha allora

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -x^2\cos x + 2 \overset{(\alpha)}{\int} x\cos x\,\mathrm{d}x$$

Integriamo ancora per parti α con $f(x) = x$ e $g'(x) = \cos x$

$$\alpha = \int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{sen} x + \cos x + c$$

Perciò si ha alla fine

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -x^2\cos x + x\operatorname{sen} x + \cos x + c$$

6. Integriamo per parti considerando $f(x) = x\operatorname{sen} x$ e $g'(x) = e^x$. Si ottiene allora

$$\int x\,e^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = x\,e^x\operatorname{sen} x - \int (\operatorname{sen} x + x\cos x)\,e^x\,\mathrm{d}x =$$

$$= x\,e^x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,e^x\,\mathrm{d}x - \overset{(\alpha)}{\int} x\cos x\,e^x\,\mathrm{d}x$$

Ora integriamo α per parti considerando $f(x) = x\cos x$ e $g'(x) = e^x$

$$\alpha = \int x \cos x \, e^x \ \mathrm{d}x = x \cos x \, e^x - \int (\cos x - x \operatorname{sen} x) \, e^x \ \mathrm{d}x =$$

Ricapitolando si ha quindi

$$\begin{aligned}\int x \, e^x \operatorname{sen} x \ \mathrm{d}x = x \, e^x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, e^x \ \mathrm{d}x - x \cos x \, e^x + \int \cos x \, e^x \ \mathrm{d}x \\ - \int x \, e^x \operatorname{sen} x \ \mathrm{d}x\end{aligned}$$

da cui portando a primo membro l'ultimo termine

$$2 \int x \, e^x \operatorname{sen} x \ \mathrm{d}x = x \, e^x \operatorname{sen} x - \overset{(\beta)}{\int} \operatorname{sen} x \ e^x \ \mathrm{d}x - x \cos x \, e^x + \int \cos x \, e^x \ \mathrm{d}x$$

Intregro di nuovo β per parti prendendo $f(x) = e^x$ e $g'(x) = \operatorname{sen} x$.

$$\beta = \int \operatorname{sen} x \ e^x \ \mathrm{d}x = -\cos x \ e^x + \int \cos x \ e^x \ \mathrm{d}x$$

Sostituendo β e semplificando si ottiene infine

$$\int x \, e^x \operatorname{sen} x \ \mathrm{d}x = \frac{x \, e^x \operatorname{sen} x - x \cos x \, e^x + \cos x \ e^x}{2}$$