Corso di laurea in Matematica

CAM - Complementi di Analisi Matematica

Prova d'esonero del 10-04-02

CORREZIONE

<u>Esercizio 1.</u> Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$I(x) = \int \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^3}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Soluzione 1. Ponendo

$$t = x + \sqrt{1+x^2},$$

si ha

$$\mathrm{d}t = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\mathrm{dx} = \frac{t}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

e quindi

$$I(x) = \int t^3\,\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} = \frac{1}{3}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^3.$$

Soluzione 2. Oppure si può porre $1+x^2 = (x+t)^2$, che implica

$$t = \sqrt{1+x^2} - x,$$

così che

$$x = \frac{1-t^2}{2t}, \qquad \sqrt{1+x^2} = \frac{1+t^2}{2t}, \qquad \mathrm{d}x = -\frac{1+t^2}{2t^2}\mathrm{d}t.$$

Allora l'integrale diventa

$$\begin{aligned} I(x) &= -\int \frac{\left(\frac{1-t^2}{2t}+\frac{1+t^2}{2t}\right)^3}{\frac{1+t^2}{2t}}\,\frac{1+t^2}{2t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int \frac{2^3}{(2t)^2(1+t^2)}\,\frac{1+t^2}{2t}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t^4}, \end{aligned}$$

dove

$$J(t) = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^4} = \int t^{-4}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}t^{-3}.$$

Quindi

$$I(x) = -J(t) = \frac{1}{3}t^{-3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\right)^3.$$

Si noti che le due espressioni trovate sono uguali, come è imediato verificare, poiché

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x}\,\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}+x} = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)-x^2} = x+\sqrt{1+x^2}.$$

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$I(x) = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, \mathrm{d}x.$$

Soluzione 1. Si noti che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x + \cos x) = \cos x - \sin x = -(\sin x - \cos x),$$

così che, ponendo

$$f(x) = \sin x + \cos x,$$

l'integrale $I(x)$ si può riscrivere

$$I(x) = -\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, \mathrm{d}x, \qquad f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x).$$

Quindi, se $t = f(x)$, si ha $\mathrm{d}t = f'(x)\mathrm{d}x$, da cui si ottiene

$$I(t) = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln|t| = -\ln|\sin x + \cos x|.$$

Soluzione 2. Oppure, se uno vuole complicarsi la vita, può procedere come segue. Ponendo $t = \mathrm{tg}(x/2)$, e quindi

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t,$$

si ha

$$I(x) = \int \frac{\dfrac{2t-1+t^2}{1+t^2}}{\dfrac{2t+1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int \frac{2t-1+t^2}{2t+1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \equiv 2J(t),$$

$$J(t) = \int \frac{1-2t-t^2}{(t^2-2t-1)(t^2+1)}\mathrm{d}t \equiv J(t),$$

dove si può scrivere

$$(t^2-2t-1) = (t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2}),$$

e quindi

$$\frac{-t^2-2t+1}{(t^2-2t-1)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1-\sqrt{2}} + \frac{B}{t-1+\sqrt{2}} + \frac{Ct+D}{t^2+1}.$$

Quindi si deve avere

$$\begin{aligned}
&A\left(t-1+\sqrt{2}\right)\left(1+t^2\right) + B\left(t-1-\sqrt{2}\right)\left(1+t^2\right) + (Ct+D)\left(t^2-2t-1\right) \\
&\quad = (A+B+C)\,t^3 + \Big((-1+\sqrt{2})A + (-1-\sqrt{2})B - 2C + D\Big)\,t^2 \\
&\qquad + (A+B-C-2D)\,t + \Big((-1+\sqrt{2})A + (-1-\sqrt{2})B - D\Big) \\
&\quad = -t^2-2t+1;
\end{aligned}$$

si ottiene quindi il sistema

$$\begin{cases} A+B+C=0, \\ (-1+\sqrt{2})A+(-1-\sqrt{B})-2C+D=-1, \\ A+B-C-2D=-2, \\ (-1+\sqrt{2})A+(-1-\sqrt{2})B-D=1, \end{cases}$$

che ammette soluzione

$$\begin{cases} A=-\dfrac{1}{2}, \\ B=-\dfrac{1}{2}, \\ C=1, \\ D=0. \end{cases}$$

In conclusione

$$\begin{aligned} J(t) &= -\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1-\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1+\sqrt{2}}+\int\frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left|t-1-\sqrt{2}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|t-1+\sqrt{2}\right|+\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right), \end{aligned}$$

che dà

$$\begin{aligned} I(x) = 2J(\mathrm{tg}x/2) &= -\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}\right|-\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}\right|+\frac{1}{2}\ln\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right) \\ &= -\ln\frac{\left|\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}-2\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1\right|}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Si può facilmente verificare che l'espressione trovata coincide con quella precedente. Si ha infatti

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\frac{x}{2} &= \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1+\cos x}, \\ \mathrm{tg}^2\frac{x}{2} &= \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{(1-\cos x)\,(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}-2\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} &= \frac{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}-2\frac{\sin x}{1+\cos x}-1}{1+\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \\ &= \frac{1-\cos x-2\sin x-1-\cos x}{1+\cos x+1-\cos x} = -\frac{2\cos x+2\sin x}{2} = -\left(\sin x+\cos x\right), \end{aligned}$$

così che la prima e l'ultima espressione hanno lo stesso modulo.

ESERCIZIO 3. Discutere per quali valori $a, b \in \mathbb{R}$ esiste il seguente integrale improprio:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+a\right)^{1/2}\left(x^2+1\right)^b}.$$

Soluzione. In primo luogo si deve avere $x^2+\alpha \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, quindi deve essere $a \geq 0$.

Si ha inoltre, ponendo

$$f(x) = \frac{1}{\left(x^2+a\right)^{1/2}\left(x^2+1\right)^b},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x|^\alpha\, |f(x)| = \lim_{x\to\pm\infty} |x|^{\alpha-1-2b},$$

e quindi esiste $\alpha > 1$ tale che

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x|^\alpha\, |f(x)| = 0$$

se e solo se $b > 0$. Quindi richiedere che la funzione $f(x)$ sia integrabile in senso improprio a $\pm\infty$ impone che si abbia $b > 0$.

Poiché $x^2 + 1 \geq 1$, la funzione $f(x)$ può diventare illimitata solo se $x^2 + a$ si annulla. Poiché $a \geq 0$, distinguiamo i due casi $a > 0$ e $a = 0$.

Per $a > 0$ si ha $x^2 + a \geq a$, e quindi la funzione $f(x)$ è ovunque limitata. Se $a = 0$ allora $x^2 + a = x^2$, che si annulla per $x = 0$. Si ha in tal caso

$$\lim_{x\to 0} |x| f(x) = 1,$$

quindi la funzione $f(x)$ non è integrabile in 0 per $a = 0$.

In conclusione si deve avere $a > 0$ e $b > 0$.

<u>Esercizio 4.</u> Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$I(x) = \int e^{\arccos x}\, \mathrm{d}x.$$

Soluzione 1. Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x\right) e^{\arccos x}\, \mathrm{d}x \\
&= x e^{\arccos x} - \int x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{\arccos x}\right) \\
&= x e^{\arccos x} - \int x \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arccos x}\right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Integrando di nuovo per parti l'ultimo integrale, si ottiene

$$\begin{aligned}
J(x) &\equiv \int x \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arccos x}\right) \mathrm{d}x \\
&= -\int \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) e^{\arccos x} = \int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1-x^2}\right) e^{\arccos x} \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{1-x^2} e^{\arccos x} - \int \sqrt{1-x^2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{\arccos x}\right) \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{1-x^2} e^{\arccos x} - \int \sqrt{1-x^2} \left(-\frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\right) \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{1-x^2} e^{\arccos x} + \int e^{\arccos x} \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

che, inserita nell'espressione precedentemente trovata, dà

$$I(x) = x e^{\arccos x} - \sqrt{1-x^2} e^{\arccos x} - I(x),$$

da cui si ottiene

$$I(x) = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) e^{\arccos x}.$$

Soluzione 2. Oppure si pone

$$t = \arccos x, \qquad \mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\mathrm{d}x}{\sin t}$$

dove si è tenuto conto che, se $t = \arccos x$, si ha $0 \le t \le \pi$, così che risulta $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2 t} = |\sin t| = \sin t$. Quindi

$$I(x) = -J(t), \qquad J(t) = \int e^t \sin t \,\mathrm{d}t,$$

dove $J(t)$ si può integrare per parti. Si trova

$$\begin{aligned} J(t) &= \int e^t \sin t \,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^t\right) \sin t \,\mathrm{d}t = e^t \sin t - \int e^t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sin t\right) \mathrm{d}t = e^t \sin t - \int e^t \cos t \,\mathrm{d}t \\ &= e^t \sin t - \int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^t\right) \cos t \,\mathrm{d}t = e^t \sin t - e^t \cos t + \int e^t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cos t\right) = e^t \sin t - e^t \cos t - \int e^t \sin t \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

che dà

$$J(t) = \int e^t \sin t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(e^t \sin t - e^t \cos t\right).$$

Quindi

$$\begin{aligned} I(x) &= -\frac{1}{2} e^{\arccos x} \left(\sin \arccos x - \cos \arccos x\right) = \frac{1}{2} e^{\arccos x} \left(\cos \arccos x - \sin \arccos x\right) \\ &= \frac{1}{2} e^{\arccos x} \left(x - \sqrt{1 - \cos^2 \arccos x}\right) = \frac{1}{2} e^{\arccos x} \left(x - \sqrt{1-x^2}\right), \end{aligned}$$

consistentemente con il precedente risultato.

<u>Esercizio 5.</u> Studiare l'esistenza del seguente integrale improprio:

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x\,(1+\cos x)}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x.$$

Soluzione. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2, \\ I_1 &= \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x, \\ I_2 &= \int_0^\infty \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

dove il secondo integrale, tenendo conto che si ha $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, diventa

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

È sufficiente quindi studiare l'integrale I_1 (visto che anche I_2 si può esprimere in termini di I_1 attraverso la sostituzione $t = 2x$).

Scriviamo

$$
\begin{aligned}
I_1 &= I_1' + I_2'', \\
I_1' &= \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x, \\
I_1'' &= \int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x, = \lim_{b\to +\infty} \int_1^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

Integrando per parti si ottiene

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x &= \int \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x\right) \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{\cos x}{\sqrt{x}} + \int \cos x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{-1/2}\right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{\cos x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{x^{3/2}}\, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

da cui segue che si ha

$$
I_1'' = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\Big|_1^b - \frac{1}{2}\int_1^b \frac{\cos x}{x^{3/2}}\, \mathrm{d}x \right) = \cos 1 - \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{3/2}}\, \mathrm{d}x,
$$

dove l'ultimo integrale esiste in senso improprio poiché

$$
\lim_{x\to\infty} x^\alpha \left(\frac{\cos x}{x^{3/2}}\right) = 0
$$

per ogni $\alpha \in (1, 3/2)$.

L'integrale I_1' è invece ben definito poiché

$$
\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0,
$$

e quindi la funzione integranda è limitata e continua nell'intervallo d'integrazione $[0, 1]$.

<u>Esercizio 6.</u> Studiare l'esistenza del seguente integrale improprio:

$$
\int_0^\infty \frac{\left(e^{\sqrt{x}} - 1\right) e^{-x} \cos x}{x}\, \mathrm{d}x.
$$

Soluzione. Ponendo

$$
f(x) = \frac{\left(e^{\sqrt{x}} - 1\right) e^{-x} \cos x}{x}
$$

si ha, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$
\lim_{x\to\infty} x^\alpha |f(x)| = \lim_{x\to\infty} x^{\alpha-1} e^{\sqrt{x}} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} = 0,
$$

quindi la funzione $f(x)$ è integrabile all'infinito.

Per studiare il comportamento per $x = 0$ si tenga conto che risulta

$$
\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 0,
$$

così che si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}|f(x)| = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}\right)\left(e^{-x}\cos x\right) = 1,$$

che dimostra che la funzione $f(x)$ è integrabile in $x = 0$.

In conclusione la funzione $f(x)$ è integrabile in senso improprio in $[0, \infty)$.

<u>ESERCIZIO 7.</u> Calcolare:

$$I = \int_0^\infty x^4 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x,$$

sapendo che risulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Soluzione. Innanzitutto discutiamo l'esistenza dell'integrale improprio. Poiché la funzione integranda è continua e limitata in ogni intervallo finito $[0, b]$, con $b > 0$, e si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} |x|^\alpha e^{-x^2} = 0$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, possiamo concludere che la funzione $x^4 e^{-x^2}$ è integrabile in senso improprio.

Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} I(x) &= \int x^4 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{x^3}{2}\right)\left(2xe^{-x^2}\right) \mathrm{d}x = \int \left(\frac{x^3}{2}\right)\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{-x^2}\right) \mathrm{d}x \\ &= -\frac{x^3 e^{-x^2}}{2} + \int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^3}{2}\right) e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = -\frac{x^3 e^{-x^2}}{2} + \frac{3}{2}\int x^2 e^{-x^2} \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

dove, integrando di nuovo per parti, l'ultimo integrale dà

$$\begin{aligned} J(x) &\equiv \int x^2 e^{-x^2} \mathrm{d}x = \int \left(\frac{x}{2}\right)\left(2xe^{-x^2}\right) \mathrm{d}x = \int \left(\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{-x^2}\right) \mathrm{d}x \\ &= -\frac{xe^{-x^2}}{2} + \int \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x}{2}\right) e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = -\frac{xe^{-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-x^2} \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} I(x) &= -\frac{x^3 e^{-x^2}}{2} + \frac{3}{2}J(x) \\ &= -\frac{x^3 e^{-x^2}}{2} - \frac{3xe^{-x^2}}{4} + \frac{3}{4}\int e^{-x^2}\, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

che dà

$$I = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{x^3 e^{-x^2}}{2} - \frac{3xe^{-x^2}}{4}\right)\Bigg|_0^b + \frac{3}{4}\int_0^\infty e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{3}{8}\int_\infty^\infty e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{3}{8}\sqrt{\pi},$$

dove abbiamo usato il fatto che, essendo la funzione e^{-x^2} pari (e integrabile in senso improprio), si ha

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

In conclusione risulta

$$I = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}.$$