AM5: Esercizi e problemi 30.11.01

Funzioni misurabili e sommabilità

Quando non specificato, misura, misurabilità, sommabilità, si intendono nel senso di Lebesgue; L^n indica la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$.

Esercizio 1

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ localmente Lipschtziana. Provare che f trasforma insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla. Mostrare con un esempio che le funzioni continue non hanno, in generale, questa proprietà.

Esercizio 2

Sia f_n una successione di funzioni misurabili. Provare che l'insieme $\{x : \exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\}$ è misurabile.

Esercizio 3

(i) Sia $\phi \geq 0$ una funzione semplice e misurabile in $\mathbf{R}^n$. Posto $\Gamma_\phi(t) := L^n(\{x \in \mathbf{R}^n : \phi(x) > t\})$, provare che Γ_ϕ è costante a tratti e

$$\int_{\mathbf{R}^n} \phi = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \Gamma_\phi(t)dt$$

(l'integrale a secondo membro è inteso nel senso di Riemann..)

(ii) Sia $f \geq 0$ misurabile, $\Gamma_f(t) := L^n(\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) > t\})$. Provare che Γ_f è Riemann integrabile su $[0, R], \forall R > 0$, e

$$\int_{\mathbf{R}^n} f = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \Gamma_f(t)dt$$

Esercizio 4

Calcolare, usando l'esercizio precedente, $I_p = \int_{\mathbf{R}^n} ||x||^{-p}\chi_{\{||x||\leq 1\}}$, e $J_p = \int_{\mathbf{R}^n} ||x||^{-p}\chi_{\{||x||\geq 1\}}$, e concludere che $I_p < +\infty$ se e solo se $p < n$, $J_p < +\infty$ se e solo se $p > n$.

Esercizio 5

Sia f sommabile in $\mathbf{R}$. Provare che la serie $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k)$ converge assolutamente quasi per ogni $x \in \mathbf{R}$ ad una funzione g, periodica di periodo uno, e tale che $g\chi_{[a,b]}$ è sommabile $\forall a \leq b]$

Esercizio 6

Sia $\Phi : \mathbf{N} \to \mathbf{Q} \cap [0,1]$ biiezione, $\Phi(k) = \frac{m_k}{n_k}$, m_k, n_k primi tra loro. Sia $f_k(x) = e^{-(m_k - n_k x)^2}$, $x \in [0,1]$. Provare che f_k tende a zero in misura, mentre $\lim f_k(x)$ non esiste per alcun x.

Esercizio 7

Provare che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (\cos nx)^{n^4}$ converge quasi per ogni $x \in [-\pi, \pi]$ e diverge in un insieme denso in $[-\pi, \pi]$.

Esercizio 8

Sia f misurabile e limitata in $\mathbf{R}^n$. Provare, usando l'esercizio 3, che
$\int_{\mathbf{R}^n} |f| < +\infty$ se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} L^n(\{x : |f(x)| \geq \frac{1}{2^n}\}) < +\infty$
Provare con un controesempio che l'implicazione $\Leftarrow$ è in generale falsa se f non si assume limitata.

Esercizio 9

Sia f misurabile in $\mathbf{R}^n$ e nulla fuori di una palla. Provare che
$\int_{\mathbf{R}^n} |f| < +\infty$ se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n L^n(\{x : |f(x)| \geq 2^n\}) < +\infty$
Provare con un controesempio che l'implicazione $\Leftarrow$ è in generale falsa se f non si assume a supporto compatto.