AM5: Esercizi e problemi 23.11.01

Misure e insiemi misurabili

Esercizio 1

Sia μ misura su X. Sia $X_0 \subset X$.

i) Sia $\mu_{|X_0}(E) = \mu(E), \forall E \subset X_0$ (misura indotta su X_0). Provare che $\mu_{|X_0}$ è una misura su X_0. Descrivere gli insiemi $\mu_{|X_0}$-misurabili.

(ii) Sia $\mu/X_0(E) = \mu(E \cap X_0) \forall E \subset X$. Provare che μ/X_0 è una misura su X. Descrivere gli insiemi μ/X_0-misurabili.

Esercizio 2

Sia X un insieme dato.
(i) Dato $X_0 \subset X$, sia $\delta_{X_0}(E) = +\infty$ se $E \cap X_0 \neq \emptyset$, $\delta_{X_0}(E) = 0$ se $E \cap X_0 = \emptyset$.
Provare che δ_{X_0} è una misura su X e determinarne i misurabili.
(ii) Sia X non numerabile. Per ogni sottoinsieme E di X, sia
$\mu(E) = 0$ se E è numerabile, $\mu(E) = 1$ se E non è numerabile.
Provare che μ è una misura su X e descrivere gli insiemi μ-misurabili.

Esercizio 3

Dato X, sia Σ una σ-algebra di sottoinsiemi di X, $\mu : \Sigma \to [0, +\infty]$ tale che

$$(i)\mu(\emptyset) = 0, (ii)E_i \in \Sigma, E_i \cap E_j = \emptyset \forall i \neq j \Rightarrow \mu(\cup_{i=}^{+\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i)$$

Sia $\nu(E) = \inf\{\sum \mu(A_j) : E \subset \cup A_j, A_j \in \Sigma\}$.

Provare che ν è misura su X. È vero che Σ contiene / è contenuta / coincide con la σ-algebra degli insiemi ν-misurabili?

Misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$

Esercizio 1

Sia L^n la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$. Provare che
(i) $L^n(A+h) = L^n(A) \forall A \subset \mathbf{R}^n, \forall h \in \mathbf{R}^n$ e $L^n(tA) = t^n L^n(A), \forall A \subset \mathbf{R}^n, t > 0$
(ii) A misurabile $\Rightarrow A + h, tA$ sono L^1-misurabili $\forall h \in \mathbf{R}, t > 0$

Esercizio 2

(i) Dare un esempio, in $\mathbf{R}^2$, di un insieme misurabile secondo Lebesgue, che non è boreliano.

(ii)Provare che le affermazioni:

- non tutti gli insiemi misurabili secondo Lebesgue in $\mathbf{R}^n$ sono boreliani
- esiste un insieme di misura nulla (secondo Lebesgue) che non è boreliano

sono equivalenti.

Esercizio 3

Sia $A \subset \mathbf{R}$, di misura di Lebesgue positiva. Provare che A contiene sottoinsiemi che non sono Lebesgue-misurabili.

Esercizio 4

Provare che $A \subset \mathbf{R}^n$ è Lebesgue-misurabile se e solo se $A \cap B_r$ è misurabile (secondo Lebesgue), per ogni $r > 0$ (B_r palla di raggio r).

Esercizio 5

Considerare la relazione di equivalenza in $\mathbf{R}$: xEy se e solo se $x - y$ è razionale, $x, y \in \mathbf{R}$. Sia $[x] = \{y : yEx\}$ e Λ l'insieme delle classi di equivalenza. Sia

$\phi : \Lambda \to \mathbf{R}$ tale che $\phi([x]) \in [x] \cap [0, 1]$, e sia $Z := \phi(\Lambda)$. Indicata con L^1 la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}$, provare che

(i) $L^1(Z) > 0$ e Z non è Lebesgue misurabile

(ii) $Z_0 \subset Z, L^1(z_0) > 0 \Rightarrow Z_0$ non è Lebesgue misurabile $\mathbf{R}$

Misure di Hausdorff

Esercizio 1

Provare che la misura di Hausdorff H^s su di uno spazio metrico X è boreliana.

Esercizio 2

Sia H^s la misura di Hausdorff s-dimensionale in $\mathbf{R}^n$. Provare che:

(i) $H^s(rA) = r^s H^s(A), \forall A \subset \mathbf{R}^n, \forall r > 0$

(ii) $H^s(A) < +\infty, t < s \Rightarrow H^t(A) = 0$
(iii) $H^s(A) > 0, t < s \Rightarrow H^t(A) = +\infty$

Funzioni misurabili

Esercizio 1

Sia $f : \mathbf{R} \to [0, +\infty]$, tale che $\{x : f(x) = c\}$ è misurabile (secondo Lebesgue) per ogni c. La funzione f è necessariamente Lebesgue misurabile?

Esercizio 2

Sia $f : \mathbf{R} \to (-\infty, +\infty)$. Provare che
(i) se f è inferiormente (superiormente) semicontinua, allora f è Boreliana.
(ii) se f è monotona, allora è misurabile secondo Lebesgue.

Esercizio 3

Sia $f : \mathbf{R} \to (-\infty, +\infty)$ Lebesgue misurabile. Provare che la preimmagine di un Boreliano è Lebesgue misurabile. Mostrare con un esempio che la preimmagine di un misurabile può non essere misurabile.