1 Trasformata di Fourier

Definizione 1.1 *Sia $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$. Si definisce la trasformata di Fourier di f come*

$$\hat{f}(\xi) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} \, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \ . \tag{1}$$

Proposizione 1.2 *La trasformata di Fourier $\hat{f}$ di una funzione $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ gode delle seguenti proprietà:*
(i) $\hat{f} \in C(\mathbb{R})$ e

$$\sup_{\mathbb{R}} |\hat{f}| \le \|f\|_1 \ . \tag{2}$$

(ii) Sia p un intero positivo. Se $x \to x^p f(x) \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ allora $\hat{f} \in C^p(\mathbb{R})$ e

$$\partial_\xi^k \hat{f}(\xi) = (-i)^k \widehat{(x^k f)}(\xi) \ , \qquad \forall \ k \le p \ . \tag{3}$$

(iii) Sia p un intero positivo. Se $f \in C^p(\mathbb{R})$ e $f^{(k)} \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ per ogni $k \le p$, allora

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi) \ , \qquad \forall \ k \le p \ . \tag{4}$$

(iv) Sia p un intero positivo. Se $f \in C^p(\mathbb{R})$ e $f^{(k)} \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ per ogni $k \le p$, allora

$$|\hat{f}(\xi)| \le \frac{\|f^{(p)}\|_1}{|\xi|^p} \ , \qquad \forall \ \xi \ne 0 \ , \tag{5}$$

e

$$|\hat{f}(\xi)| \le \frac{M}{1 + |\xi|^p} \ , \qquad M \equiv 2 \ \max\{\|f\|_1 \ , \ \|f^{(p)}\|_1\} \ . \tag{6}$$

Nel corso della dimostrazione useremo il seguente semplice

Lemma 1.3 *Siano g_j $(j \ge 1)$, g, G funzioni in $\mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ tali che*

$$|g_j| \le G \ , \qquad |g| \le G \ . \tag{7}$$

Sia $\{A_k\}$ una successione di insiemi, misurabili secondo Peano–Jordan, su cui g_j,g e G siano Riemann–integrabili e tali che $A_k \subset A_{k+1}$, $\bigcup_k A_k = \mathbb{R}$. Se, per ogni k, $g_j \to g$ uniformemente su A_k, allora $\|g_j - g\|_1 \to 0$.

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$. Da (7), dalle ipotesi sugli A_k e dalla definizione di integrale di Riemann generalizzato, segue che esiste k tale che, per ogni $j \ge 1$,

$$\int_{A_k^c} |g| \le \frac{\varepsilon}{4} \ , \qquad \int_{A_k^c} |g_j| \le \frac{\varepsilon}{4} \ . \tag{8}$$

Inoltre esiste j_0 tale che $|g_j(x)-g(x)| < \varepsilon/(4\,\mathrm{mis}(A_k))$ per ogni $x \in A_k$ e per ogni $j \geq j_0$. Dunque, per ogni $j \geq j_0$,

$$\|g_j - g\|_1 = \int_{A_k^c} |g_j - g| dx + \int_{A_k} |g_j - g| dx \leq \int_{A_k^c} (|g_j| + |g|) dx + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \ . \quad \blacksquare$$

Dimostrazione (della Proposizione 1.2) La (2) è ovvia. Sia ξ_j una qualunque successione che converga a ξ e sia $g_j(x) \equiv f(x)e^{-ix\xi_j}$ e $g(x) \equiv f(x)e^{-ix\xi}$. Chiaramente g_j e g verificano le ipotesi del lemma (con $G \equiv |f|$ e A_k una qualunque successione crescente di insiemi misurabili secondo Peano–Jordan per cui $\int_{A_k} |f| \to \int_{\mathbb{R}} |f|$) e dunque $\hat{f}(\xi_j) \to \hat{f}(\xi)$.

(ii) Dimostriamo prima l'asserto per $p = 1$. Sia $h_j \neq 0$ una qualunque successione convergente a 0 e sia

$$g_j(x) \equiv f(x)e^{-ix\xi} \frac{e^{-ixh_j} - 1}{h_j} \ , \quad g(x) \equiv (-i)xf(x)e^{-ix\xi} \ .$$

Osservando che[1]

$$\left| \frac{e^{-ixh_j} - 1}{h_j} \right| \leq 2|x| \ ,$$

si ha che $|g_j|, |g| \leq 2|x||f(x)| \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ e dunque la tesi segue dal lemma. Il caso con p arbitrario segue per induzione: supponiamo che $x^p f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ e che la (3) sia vera per $p-1$. Allora poiché $x(x^{p-1}f) \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$, usando la (3) con $k = 1$, si ha che

$$\partial_\xi \widehat{(x^{p-1}f)}(\xi) = -i\widehat{(x^p f)}(\xi)$$

che, insieme alla (3) con $k = p-1$, implica la tesi.

(iii) Sia $p = 1$ e assumiamo, dapprima, che $f(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$. Allora,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-ix\xi} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f'(x)e^{-ix\xi} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \lim_{R\to\infty} \Big[\frac{f(x)e^{-ix\xi}}{\sqrt{2\pi}} \Big]_{-R}^{R} + i\xi \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f e^{-ix\xi} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= i\xi \hat{f}(\xi) \ .
\end{aligned}$$

In generale da $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ non segue che $|f(x)| \to 0$ per $|x| \to \infty$ ma è sempre possibile trovare due successioni $R_j \to \infty$ e $R'_j \to -\infty$ tali che $f(R_j)$ e $f(R'_j)$ tendano a 0 per $j \to \infty$: questo è sufficiente per ripetere l'argomento dato. Il caso con p arbitrario si ottiene per iterazione.

La (5) segue immediatamente da (4) insieme a (2). Per la (6) si usi la (2) nell'intervallo $|\xi| \leq 1$ e la (5) per $|\xi| \geq 1$. $\blacksquare$

Il prossimo risultato spiega come ricostruire la funzione f a partire dalla sua trasformata di Fourier.

[1] Per ogni $0 \neq t \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{e^{it}-1}{t}\right| \leq 2$.

Proposizione 1.4 (Teorema di inversione per funzioni C_0^2) *Sia*[2] $f \in C_0^2(\mathbb{R})$, *allora*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} \ \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}} \ , \qquad \forall \ x \in \mathbb{R} \ . \tag{9}$$

La dimostrazione, oltre che sulle proprietà della trasformata di Fourier è basata sulle approssimazioni discrete dell'integrale di Riemann su $\mathbb{R}$; il seguente risultato sarà sufficiente per i nostri scopi.

Lemma 1.5 *Sia $\varphi \in C(\mathbb{R})$ tale che esistono due costanti $M > 0$ e $\alpha > 1$ tali che*

$$|\varphi(x)| \leq \frac{M}{1 + |x|^\alpha} \ , \qquad \forall \ x \in \mathbb{R} \ . \tag{10}$$

Allora $\varphi \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ e

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}} \ \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \ . \tag{11}$$

Dimostrazione Che $\varphi \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ è conseguenza immediata delle definizioni e delle ipotesi su φ. Dimostriamo, ora, che dalle ipotesi segue che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$\int_{\{|x| > R\}} |\varphi(x)| \ dx < \varepsilon \ , \qquad \delta \sum_{|n| > R/\delta} |\varphi(\delta n)| < \varepsilon \ . \tag{12}$$

Infatti, usando (10) si ha

$$\int_{\{|x| > R\}} |\varphi(x)| \ dx \leq 2M \int_R^\infty \frac{1}{x^\alpha} \ dx = \frac{2M}{\alpha - 1} \ \frac{1}{R^{\alpha - 1}} \ ,$$

che implica la prima delle (12) (con R sufficientemente grande). Analogamente, per ogni $\delta \in (0,1)$ e per ogni $R \geq 2$ si ha che[3]

$$\begin{aligned} \delta \sum_{|n| > R/\delta} |\varphi(\delta n)| &\leq \delta M \sum_{|n| > R/\delta} \frac{1}{(|n|\delta)^\alpha} = \frac{2M}{\delta^{\alpha-1}} \sum_{j > R/\delta} \frac{1}{j^\alpha} \\ &\leq \frac{2M}{\delta^{\alpha-1}} \int_{[R/\delta]} \frac{dx}{x^\alpha} \leq c(M,\alpha) \frac{1}{R^{\alpha-1}} \ , \end{aligned}$$

per una qualche costante $c(M,\alpha)$ che dipende solo da M e da α; questo è sufficiente ad ottenere la seconda delle (12) (con R sufficientemente grande).
Sia ora $\varepsilon > 0$ e sia R tale che

$$\int_{\{|x| > R-1\}} |\varphi(x)| \ dx < \frac{\varepsilon}{3} \ , \qquad \delta \sum_{|n| \geq [R/\delta] - 1} |\varphi(\delta n)| < \frac{\varepsilon}{3} \ . \tag{13}$$

[2] Si ricorda che, per un aperto $E \subset \mathbb{R}^n$, $C^p(E)$ denota la classe delle funzioni C^p con suporto compatto contenuto in E.
[3] Come al solito $[x]$ denota il più grande intero $m \leq x$.

Sia ora $0 < \delta_0 < 1$ tale che

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{6R} \ , \qquad \forall\, x, y \in \ [-R, R] \ , \ \ |x - y| < \delta_0 \ . \tag{14}$$

Per ogni $0 < \delta < \delta_0$ poniamo

$$N_\delta \equiv [R/\delta] \ , \qquad R_\delta \equiv \delta N_\delta \ , \tag{15}$$

cosicché

$$\frac{R}{\delta} - 1 < N_\delta \le \frac{R}{\delta} \ , \qquad R - \delta < R_\delta \le R \ . \tag{16}$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx - \delta \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(\delta n)\Big| \\
&\quad \le \Big|\int_{-R_\delta}^{R_\delta} \varphi(x)dx - \delta \sum_{n=-N_\delta}^{N_\delta - 1} \varphi(\delta n)\Big| + \int_{\{|x|>R_\delta\}} |\varphi(x)|dx + \delta \sum_{|n|\ge N_\delta - 1} |\varphi(\delta n)| \\
&\quad \le \sum_{n=-N_\delta}^{N_\delta - 1} \int_{\delta n}^{\delta n + 1} |\varphi(x) - \varphi(\delta n)|dx + \int_{\{|x|>R_\delta\}} |\varphi(x)|dx + \delta \sum_{|n|\ge N_\delta - 1} |\varphi(\delta n)| \\
&\quad \le 2R_\delta \ \frac{\varepsilon}{6R} + \frac{2}{3}\varepsilon \le \varepsilon \ . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Dimostrazione (della Proposizione 1.4) Sia $T_0 > 0$ tale che $\operatorname{supp} f \subset [-T_0/2, T_0/2]$ e, per $T \ge T_0$, sia f_T la funzione periodica di periodo T che coincide con f in $[-T/2, T/2]$. Allora $f_T \in C^2(\mathbb{R})$ e dai risultati sulle serie di Fourier segue che, per ogni $|x| \le T/2$,

$$f(x) = f_T(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat f_{T,n} e^{i\frac{2\pi}{T}nx} \ , \qquad (|x| \le T/2) \ , \tag{17}$$

dove la serie converge totalmente e

$$\begin{aligned}
\hat f_{T,n} \ &\equiv \ \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-i\frac{2\pi}{T}nx} \ dx \\
&= \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \frac{2\pi}{T} \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\frac{2\pi}{T}nx} \ \ \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&\equiv \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ \frac{2\pi}{T} \hat f\Big(\frac{2\pi}{T} n\Big) \ .
\end{aligned}$$

Dunque, per $T \ge 2|x|$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2\pi}{T} \hat f\Big(\frac{2\pi}{T} n\Big) \ e^{i\frac{2\pi}{T}nx} \ .$$

Ma dal punto (iv) della Proposizione 1.2 segue che

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{M}{1+|\xi|^2} ,$$

per qualche $M > 0$ e quindi la tesi segue dal Lemma 1.5 applicato alla funzione

$$\varphi(\xi) \equiv \hat{f}(\xi) \exp(ix\xi)$$

(e con $\delta = 2\pi/T$). ∎

Concludiamo questa breve discussione sulla trasformata di Fourier con una generalizzazione della Proposizione 1.4.

Proposizione 1.6 *Sia $f \in C^2(\mathbb{R})$ tale che $f^{(k)} \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$ per $k = 0, 1, 2$. Allora vale la* (9).

Dimostrazione L'idea della dimostrazione è basata sull'approssimare f con funzioni f_R di classe C_0^2 con supporto in $[-R, R]$ e far tendere R ad infinito. Sia $\varphi \in C^\infty$ una funzione monotona non crescente tale che:

$$\varphi(x) \equiv \begin{cases} 1 , & \text{se } x \leq 0 , \\ 0 , & \text{se } x \geq 1 . \end{cases} \tag{18}$$

A partire da φ, per $R > 1$, costruiamo una funzione ψ_R pari, con supporto in $[-R, R]$ e che valga 1 per $|x| \leq R - 1$:

$$\psi_R(x) \equiv \begin{cases} 1 , & \text{se } 0 \leq x \leq R-1 , \\ \varphi(x - R + 1) , & \text{se } x \geq R - 1 , \\ \psi_R(-x) , & \text{se } x < 0 . \end{cases} \tag{19}$$

Poniamo $f_R \equiv f\psi_R$. Chiaramente $f_R \in C_0^2$ e quindi vale la (9) con f_R al posto di f. Poiché f_R coincide con f se $|x| \leq R - 1$, per ogni $R > 1$ e per ogni $|x| \leq R - 1$, si ha

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_R(\xi) e^{ix\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}} , \qquad (|x| \leq R-1) . \tag{20}$$

Per prendere il limite per $R \to \infty$ in tal relazione ed ottenere la tesi, useremo il Lemma 1.3. Dalle ipotesi su f e dalla Proposizione 1.2, (6), segue che

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{M_1}{1+|\xi|^2} , \qquad M_1 \equiv 2 \ \max\{\|f\|_1 \ , \ \|f^{(2)}\|_1\} . \tag{21}$$

Osserviamo che, se

$$c \equiv \max\{1 \ , \ \sup_{[0,1]} |\varphi'| \ , \ \sup_{[0,1]} |\varphi''| \ \} , \tag{22}$$

allora

$$\max\{\ 1\ ,\ \sup_{\mathbb{R}} |\psi_R'|\ ,\ \sup_{\mathbb{R}} |\psi_R''|\ \} \le c\ . \tag{23}$$

Dunque, essendo $(f\psi_R)'' = f''\psi_R + 2f'\psi_R' + f\psi_R''$, si ha che

$$\|f_R\|_1 \le \|f\|_1\ , \qquad \|(f\psi_R)''\|_1 \le \|f''\|_1 + 2\|f'\psi_R'\|_1 + \|f\psi_R''\|_1 \le c\Big(\|f\|_1 + \|f'\|_1 + \|f''\|_1\Big)\ . \tag{24}$$

Quindi, applicando (6) a f_R si ha che

$$|\hat{f}_R(\xi)| \le \frac{M_2}{1+|\xi|^2}\ , \tag{25}$$

per una costante M_2 opportuna (che dipende solo da $\|f^{(k)}\|_1$ per $k = 0, 1, 2$). Inoltre $\hat{f}_R(\xi)\exp(ix\xi) \to \hat{f}(\xi)\exp(ix\xi)$ uniformemente su $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
|\hat{f}_R(\xi) - \hat{f}(\xi)| \quad &\equiv \quad \Big|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\psi_R(x)-1)\ e^{-ix\xi}\ \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\Big| \\
&\le \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ |\psi_R(x)-1|\ \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \le \int_{\{|x|\ge R-1\}} |f(x)|\ \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

e quest'ultimo integrale tende a 0 quando $R \to \infty$ essendo $f \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$. Ora, se R_j è una qualunque successione tendente a $+\infty$, e se

$$g_j(\xi) \equiv \hat{f}_{R_j}(\xi)\exp(ix\xi)\ , \quad g(\xi) \equiv \hat{f}(\xi)\exp(ix\xi)\ , \quad G(\xi) \equiv \max\{M_1, M_2\}/(1+|\xi|^2)\ ,$$

la tesi segue dal Lemma 1.3. ∎