Tutorato I (3/10/2001)
(Integrazione in $\mathbb{R}^n$)

Esercizio 1. ([C], Esercizio 9.4)

1.
   - Cominciamo col dimostrare che se $q = \frac{m}{n}$ (con $0 < m \leq n$ e MCD(m,n)=1), allora f è discontinua in q.
     Consideriamo, infatti, la successione $\{\alpha_n\} \subset [0,1]\backslash\mathbb{Q}$ t.c. $\alpha_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} q$ (questo è possibile per la densità degli irrazionali in $[0,1]$). Si ha quindi:
     $$\lim_{n\to+\infty} f(\alpha_n) = 0 \neq \frac{1}{n} = f(q).$$
   - Chiaramente f è continua in $q = 0$.
     Infatti, se $\{\beta_n\} \subset [0,1]$ con $\beta_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, allora $\forall\varepsilon > 0, \exists N : n > N,\ 0 < \beta_n < \varepsilon$; è opportuno distinguere due casi: se β_n è irrazionale, allora $f(\beta_n) = 0$; se invece $\beta_n = \frac{m_n}{k_n}$, allora per $n > N$ si ha $\varepsilon > \beta_n = \frac{m_n}{k_n} \geq \frac{1}{k_n} = f(\beta_n)$.
     Concludendo: $\forall\varepsilon > 0, \exists N : n > N,\ 0 \leq f(\beta_n) < \varepsilon$, che dimostra l'asserto.
   - Infine dimostriamo la continuità nei punti di $(0,1] \setminus \mathbb{Q}$.
     Sia $\alpha \in (0,1] \setminus \mathbb{Q}$ e sia $\{\beta_n\} \subset [0,1]$ con $\beta_n \stackrel{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$. Osserviamo che $\forall\varepsilon > 0$, esistono soltanto un numero finito di razionali q_j, tc $f(q_j) \geq \varepsilon$. [1] Per quanto detto, $\exists N : n > N,\ 0 < f(\beta_n) < \varepsilon$ e quindi $\lim_{n\to+\infty} f(\beta_n) = 0 = f(\alpha)$, che è la tesi.

2. Per dimostrare che $f \in \mathcal{R}([0,1])$, facciamo vedere che $\forall\varepsilon > 0, \exists f_1, f_2$ funzioni a scalini, tc $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)\ \forall x \in [0,1]$ e $\int_{[0,1]} (f_2 - f_1) < \varepsilon$.
   Consideriamo le seguenti funzioni:
   - $f_1 \equiv 0$; ovviamente $f_1(x) \leq f(x)\ \forall x \in [0,1]$.

---

[1] Infatti, se $q = \frac{m}{n}$ (con m, n come sopra), si ha che
$$f(q) = \frac{1}{n} \geq \varepsilon \Leftrightarrow n \leq \frac{1}{\varepsilon}$$
e quindi, i razionali (della forma suddetta) che soddisfano tale proprietà sono esattamente
$$\Phi = \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi\left(\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right) < \infty$$
dove $\varphi(n)$ indica la funzione di Eulero (cioè il numero dei numeri primi con n).

- Costruiamo f_2 nel seguente modo:
  sia $N \geq 3$ fissato; Ovviamente i numeri razionali $q_j = \frac{m_j}{n_j}$ con $f(q_j) > \frac{1}{N}$ sono in numero finito Φ[2]. Sia $\delta \equiv \inf_{1 \leq i < j \leq \Phi} |q_i - q_j|$ e sia invece $h_j = \frac{1}{n_j} - \frac{1}{N} > 0$. Detto $b_j \equiv \min\{\delta, \frac{1}{2h_j N\Phi}\}$, definiamo la nostra funzione nel seguente modo:

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{n_j} & \text{se } x \in (q_j - b_j, q_j + b_j) \\ \frac{1}{N} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  Osserviamo che questa funzione è ben definita, in quanto per la nostra scelta dei b_j, gli intervallini sopra sono disgiunti; inoltre f_2 è una funzione a scalini.

Concludendo:

$$\int_{[0,1]} (f_2 - f_1) = \int_0^1 f_2 = \frac{1}{N} + \sum_{j=1}^{\Phi} h_j 2 b_j \leq \frac{1}{N} + \sum_{j=1}^{\Phi} h_j 2 \frac{1}{2h_j N\Phi} = \frac{2}{N}.$$

Dall'arbitrarietà di N segue l'asserto.

Esercizio 2. A è Peano-Jordan misurabile $\Leftrightarrow$ la funzione caratteristica χ_A è Riemann integrabile $\Leftrightarrow$ (per def. di integrabilità) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists f_1, f_2$ funzioni a scalini tc $f_1(x) \leq \chi_A(x) \leq f_2(x)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} (f_2 - f_1) < \varepsilon$.
Siano:

$$\begin{array}{ll} f_1(x) = \sum_{n=1}^{N_1} \alpha_n \chi_{R_n^1}(x) & \text{con } \{R_n^1\}_{n=1}^{N_1} \text{ rettangoli disgiunti e } 0 < \alpha_n \leq 1 \\ f_2(x) = \sum_{n=1}^{N_2} \beta_n \chi_{R_n^2}(x) & \text{con } \{R_n^2\}_{n=1}^{N_2} \text{ rettangoli disgiunti e } \beta_n \geq 1 \end{array}$$

Definiamo: $E_1 = \cup_{n=1}^{N_1} R_n^1$ e $E_2 = \cup_{n=1}^{N_2} R_n^2$ (con E_1, E_2 insiemi elementari).
Poichè $f_1(x) \leq \chi_A(x)$, allora :

$$x \in E_1 \Rightarrow x \in E_k,\ \exists\, k \Rightarrow 0 < f_1(x) = \alpha_k \leq 1 \Rightarrow \chi_A(x) = 1 \Rightarrow x \in A$$

quindi $E_1 \subset A$.
Analogamente, si dimostra che $A \subset E_2$.
Per concludere, basta osservare che: $\text{mis}_n E_2 - \text{mis}_n E_1 \leq \sum_{n=1}^{N_2} \text{mis}_n R_n^2 - \sum_{n=1}^{N_1} \text{mis}_n R_n^2 \leq \sum_{n=1}^{N_2} \beta_n \text{mis}_n R_n^2 - \sum_{n=1}^{N_1} \alpha_n \text{mis}_n R_n^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (f_2 - f_1) < \varepsilon$.
Il viceversa, segue immediatamente prendendo $f_1 = \chi_{E_1}$ e $f_2 = \chi_{E_2}$.

[2] Cfr. nota (1)

Esercizio 3. ([C], Esercizio 9.5)
Cominciamo col dimostrare che ∂A è un insieme P-J misurabile; dal teorema di Lebesgue-Vitali segue che ∂A è un insieme di misura nulla (in quanto rappresenta l'insieme dei punti di discontinuità dell funzione χ_A, che è Riemann integrabile). Quindi, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \{E_n\}_{n\geq 1}$ ricoprimento al più numerabile di ∂A, tc $\sum_{n\geq 1} \text{mis}_n E_n < \varepsilon$. Inoltre A è limitato $\Rightarrow$ ∂A è un compatto, quindi posso estrasse un sottoricoprimento finito $\{E'_n\}_{n=1}^N$ con $\sum_{n=1}^N \text{mis}_n E'_n \leq \sum_{n\geq 1} \text{mis}_n E_n < \varepsilon$. Da ciò segue che ∂A è un insieme P-J misurabile, con misura nulla.
Adesso osservando che gli insieme P-J misurabile costituiscono un'algebra [3] segue facilmente che $\overline{A} = A \cup \partial A$ e $\overset{o}{A} = A \setminus \partial A$ stanno ancora nell'algebra e quindi sono P-J misurabili.

Esercizio 4. ([C], Esercizio 9.6)
Cominciamo col dimostrare che $\mathbb{Q}^n \cap E$ ha misura nulla. Osserviamo che $\mathbb{Q}^n \cap E$ è un insieme numerabile denso in E, e quindi lo possiamo scrivere nella forma $\mathbb{Q}^n \cap E = \{q_j\}_{j\geq 1}$ con $q_j = (q_j^1, \ldots, q_j^n)$.
$\forall \varepsilon > 0$, consideriamo il seguente ricoprimento $\{Q_j\}_{j\geq 1}$ dove:

$$Q_j = (q_j^1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2^j}\right)^{\frac{1}{n}}, q_j^1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2^j}\right)^{\frac{1}{n}}) \times \ldots \times (q_j^n - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2^j}\right)^{\frac{1}{n}}, q_j^n + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2^j}\right)^{\frac{1}{n}}).$$

Quindi Q_j è un parallelepipedo n-dimensionale con $\text{mis}_n Q_j = \left[2\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2^j}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^n = \frac{\varepsilon}{2^j}$.
Perciò $\{Q_j\}_{j\geq 1}$ è un ricoprimendo numerabile di $\mathbb{Q}^n \cap E$, con :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \text{mis}_n Q_j = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon.$$

Dimostriamo ora che non è Peano-Jordan misurabile (usando l'esercizio 2).
Sia E_1 un insieme elementare tc $E_1 \subset \mathbb{Q}^n \cap E$; poichè $\mathbb{Q}^n \cap E$ è totalmente sconnesso, ogni rettangolo contenuto deve essere degenere, quindi E_1 è unione di un numero finito di rettangoli degenere, da cui segue che $\text{mis}_n E_1 = 0$. Perciò:

$$\sup\{\text{mis}_n E_1 : E_1 \subset \mathbb{Q}^n \cap E \text{ è un insieme elementare}\} = 0.$$

[3] $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ si dice un'algebra se:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$;
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$;
3. $\{A_n\}_{n=1}^N \subset \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{F}$.

Vediamo ora, come possiamo approssimarlo dall'esterno con insiemi elementari.
Se $E_2 \supset \mathbb{Q}^n \cap E$, allora $\overset{o}{E} \subset \overline{E_2}$. Infatti (per assurdo):
se $p \in \overset{o}{E}$ e $p \notin \overline{E_2} \Rightarrow$ (usando il fatto che $(\overline{E_2})^c$ è aperto) $\exists \, \mathcal{D}_r^n(p) \subset \overset{o}{E} \subset E$ tc $\mathcal{D}_r^n(p) \cap \overline{E_2} = \emptyset$.
Ma in $\mathcal{D}_r^n(p)$, esistono infiniti elementi di $\mathbb{Q}^n \cap E$ (semplicemente per la densità di $\mathbb{Q}^n$ in E), e questo contraddice il fatto che $E_2 \supset \mathbb{Q}^n \cap E$.
Inoltre:

$$\text{mis}_n E_2 = \text{mis}_n \overline{E_2} \geq \text{mis}_n \overset{o}{E} = \text{mis}_n E > 0$$

e quindi:

$$\inf\{\text{mis}_n E_2 : \ E_2 \supset \mathbb{Q}^n \cap E \text{ è un insieme elementare}\} \geq \text{mis}_n E > 0.$$

Quindi $\mathbb{Q}^n \cap E$ non può essere P-J misurabile in quanto l'inf e il sup visti sopra, non tendono ad un valore comune; cioè $\forall \, E_1 \subset \mathbb{Q}^n \cap E \subset E_2$ si ha che $\text{mis}_n E_2 - \text{mis}_n E_1 \geq \text{mis}_n E > 0$, e quindi non può essere resa arbitrariamente piccola.