Prova scritta di AM4 del 10/1/02

1) Sia $A \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq \pi/2,\ |x - y| \leq 1\}$ e si calcoli l'integrale

$$\int_A \cos(x + y) e^{x-y} dx dy \ .$$

2) Sia $A \equiv \{x \in \mathbb{R}^3 : |x|^2 \leq 1,\ x_3 \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\}$.

(i) Si calcoli l'area di ∂A.

(ii) Sia $f(x) = ax$, dove $a \in \mathbb{R}$. Calcolare il flusso esterno di f sulla parte regolare di ∂A (ovvero sulla parte di A dove è definita la normale esterna).

(iii) Utilizzando il punto (ii), si calcoli il volume di A.

3) Sia $f(t)$ la funzione 2π–periodica che vale 0 su $[-\pi, 0]$ e vale $t(\pi - t)$ su $[0, \pi]$.

(i) Calcolare la serie di Fourier di f e discuterne la convergenza.

(ii) Si trovi una soluzione 2π–periodica dell'equazione differenziale

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = f(t) \ .$$

4) Sia

$$A \equiv \bigcup_{j \geq 1} \left[j - \frac{1}{2^{j+1}} \ , \ j + \frac{1}{2^{j+1}} \right].$$

(i) Dimostrare che A è misurabile secondo Peano–Jordan in senso generalizzato e calcolarne la misura.

(ii) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione x^a è integrabile in senso generalizzato su A.

5) Dimostrare l'uguaglianza di Parseval per la trasformata di Fourier di una funzione $C_0^1(\mathbb{R})$.

6) Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che se se $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ e $\mathrm{supp}\,(f) \subset \Omega$ allora

$$\int_\Omega \partial_{x_i} f dx = 0 \ , \qquad \forall\ i \ .$$