Tutorato V (28/11/2001)

(1-forme differenziali, Teorema di Stokes e della divergenza)

Esercizio 1.

1. ω è definita su tutto $\mathbb{R}^3$, ed è chiusa e quindi esatta (in quanto il dominio è semplicemente connesso). Una primitiva è data da: $f(x,y,z) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^2}{2}$.

2. ω è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ma non è chiusa (infatti $\partial_y \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \neq \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} = \partial_x \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)$, e quindi non può essere esatta.

3. ω è definita su tutto $\mathbb{R}^2$, ed è chiusa e quindi esatta (in quanto il dominio è semplicemente connesso). Una primitiva è data da: $f(x,y) = \frac{x}{1+y^2}$.

4. Si verifica facilmente che:

$$\omega \text{ è chiusa } \Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ B = -C \end{cases} .$$

   Osserviamo che ω è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, che non è semplicemente connesso, per cui chiusura $\not\Rightarrow$ esattezza.
   Procediamo quindi nel seguente modo:

   (a) Per ogni γ curva chiusa che non gira intorno all'origine, si ha che $\int_\gamma \omega = 0$, in quanto ω è localmente esatta, cioè è esatta in ogni dominio semplicemente connesso, contenuto nel suo insieme di definizione;

   (b) Se γ è una curva che compie un giro intorno all'origine in senso antiorario, detta C la circonferenza di centro 0 e raggio 1 orientata positivamente, si ha che:

$$\int_\gamma \omega = \int_C \omega .$$

   (Quest'ultimo risultato segue facilmente applicando le formule di Gauss Green nel piano, ed il fatto che è una forma chiusa).

   Da queste considerazioni, si deduce il seguente fatto:

$$\omega \text{ è esatta } \Leftrightarrow \int_C \omega = 0 .$$

Imponendo quest'ultima condizione si ottiene che:

$$\omega \text{ è esatta} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A = D \\ B = C = 0 \end{cases} .$$

In tal caso una primitiva è data da $f_A(x,y) = A \log \sqrt{x^2 + y^2}$.

Esercizio 2. Si verifica che: $\int_\varphi \omega \; = \; \frac{1}{3}$.

Esercizio 3. Comiciamo con l'osservare che $\mathcal{T}$ è un ottaedro (cioè la palla unitaria di $\mathbb{R}^3$, nella metrica indotta dalla $\|\cdot\|_1$). I vertici di tale ottaedro sono le intersezioni con gli assi coordinati: $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$. Osserviamo inoltre che $\mathcal{T}$ è simmetrico rispetto a tutti i piani coordinati.

1. Integriamo sezionando $\mathcal{T}$ parallelamente al piano xy, ottenendo (si osservi che la z-sezione di $\mathcal{T}$ è $\mathcal{T}(z) = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 1 - |z|\}$, quadrato con lato lungo $\sqrt{2}(1 - |z|)$):

$$\int_{\mathcal{T}} |z|^\gamma \, dx\, dy\, dz \; = \int_{-1}^{1} |z|^\gamma \, dz \int_{\mathcal{T}(z)} dx\, dy \; = \int_{-1}^{1} |z|^\gamma 2(1 - |z|)^2 \, dz \; =$$

$$= 4 \int_0^1 \left(z^\gamma - 2z^{\gamma+1} + z^{\gamma+2} \right) \, dz \; =$$

l'ultimo integrale esiste finito se e solo se $\gamma > -1$, e vale:

$$= 4 \left(\frac{1}{\gamma+1} - \frac{2}{\gamma+2} + \frac{1}{\gamma+3} \right) = \frac{8}{(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)}.$$

2. Poichè la funzione integranda è somma di funzioni positive, l'integrale è finito se e solo se ciascuno degli addendi ha integrale finito; per la simmetria del dominio rispetto allo scambio di coordinate, si ha che i due integrali $\int_{\mathcal{T}} |x|^\alpha \, dx\, dy\, dz$ e $\int_{\mathcal{T}} |y|^\beta \, dx\, dy\, dz$ esistono finiti se e solo se $\alpha > -1$, $\beta > -1$ e valgono rispettivamente $\frac{8}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}$ e $\frac{8}{(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}$.
Riassumendo: l'integrale esiste finito se e solo se $\alpha > -1$, $\beta > -1$ e $\gamma > -1$, ed in tal caso vale

$$\frac{8}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \frac{8}{(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)} + \frac{8}{(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)}.$$

3. La divergenza di F è costante e vale $\mathrm{div} F = 3$; per il teorema della divergenza il flusso richiesto vale allora $\int_{\mathcal{T}} 3\, dx\, dy\, dz \; = 3 \mathrm{mis}_3(\mathcal{T}) = 4$ (dove il volume di $\mathcal{T}$ è $\frac{4}{3}$ e si ottiene ad esempio dal calcolo fatto in 1) ponendo $\gamma = 0$).

4. Osserviamo che la nostra porzione di superficie, che indicheremo con Σ, può essere parametrizzata nel seguente modo:

   $\Sigma = \{(x, y, 1-x-y),\ (x, y) \in D\}$ dove $D \equiv \{(x, y):\ x, y \geq 0\ x+y \leq 1\}$.

   Inoltre il versore normale a Σ in ogni punto è dato da $\nu = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Quindi il nostro flusso è dato da:

$$\int_{\Sigma} F \times \nu \, d\sigma \; = \int_D (1, 1, 1) \times \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)\, \sqrt{3}\, dx\, dy = 3 \,\mathrm{Area}(D) = \frac{3}{2}.$$

Esercizio 4. Procediamo nei due modi diversi:

1. Osserviamo che $\partial S = \partial S_1 \cup \partial S_2$, con $\partial S_1 \; = \{(\cos t,\, \sin t,\, 0),\ 0 \leq t < 2\pi\}$ e $\partial S_2 \; = \{(\cos t,\, \sin t,\, 1),\ 0 \leq t < 2\pi\}$; quindi:

$$\int_{\partial S} \omega = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{1} - \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{2} \right) dt = \pi.$$

2. Applichiamo il teorema di Stokes: (detto $F(x, y, z) = (\frac{-y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, 0)$)

$$\int_{\partial S} \omega \; = \int_S \mathrm{rot}\, F \times \nu \, d\sigma \; =$$

   dove (usando in fatto che $F_3 = 0$) $\mathrm{rot}\, F = (-\partial_z F_2,\, \partial_z F_1, \partial_x F_2 - \partial_y F_1)$. Parametrizziamo S nel seguente modo: $S = \{\Phi(t, z) = (\cos t,\, \sin t,\, z) : t \in [0, 2\pi),\ \ z \in [0, 1]\}$; quindi il versore normale esterno è dato da $\nu = (\cos t,\, \sin t,\, 0)$, mentre $\|\partial_t \Phi \wedge \partial_z \Phi\| = 1$. Sostituendo:

$$= \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 \frac{2z}{(1 + z^2)^2} \; = \pi\,.$$