Tutorato II (17/10/2001)
(Integrali iterati)

Esercizio 1.

i)	$\frac{9}{4}$	
ii)	$\frac{\pi}{24}$	(Sugg: usare le coordinate polari)
iii)	$\frac{e}{4} - \frac{1}{2}$	(Sugg: $D \equiv \{0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le 1\} \ = \ \{0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{x}\}$)
iv)	$\frac{1}{12}$	(Sugg: $D \equiv \{0 \le x \le 1,\ 1 - x \le y \le \sqrt{1 - x^2}\}$)

Esercizio 2. Osservazione: é sufficiente calcolare soltanto il primo integrale; infatti:

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} dx = - \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y - x}{(x + y)^3} dx = \int_0^1 dx' \int_0^1 \frac{x' - y'}{(x' + y')^3} dy'$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il cambio di coordinate $x' = y$ e $y' = x$. Il fatto che non si possa invertire l'ordine d'integrazione e'dovuto alla non uniforme continuità della funzione integranda in tale dominio (vedi le ipotesi delle "formule di riduzione").

Esercizio 3. Considerare il cambio di coordinate:

$$\begin{cases} x = a\rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = b\rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = c\rho \cos\varphi \end{cases}$$

con $(\varphi, \theta) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ e $0 < \rho < 1$. Il determinante Jacobiano risulta quindi:

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} \right| = abc\rho^2 \sin\varphi.$$

Con tale sostituzione, si ottiene facilmente che:

$$\iiint_{\mathcal{D}} x^2 \, dx\, dy\, dz = \frac{4}{15}\pi a^3 bc.$$

Esercizio 4. • Indichiamo con $B_3^{(1)}(0,1) \equiv \{x \in \mathbb{R}^3 : \ \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| \le 1\}$ e quindi:
$B_3^{(1)}(0,1) \cap \{x_i \ge 0, \ i = 1,2,3\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3 \le 1\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le x_3 \le 1, \ 0 \le x_2 \le 1 - x_3, \ 0 \le x_1 \le 1 - x_3 - x_2\}$.
Per la simmetria del problema si ha che:

$$\mathrm{Vol}(B_3^{(1)}(0,1)) = \int_{B_3^{(1)}(0,1)} dx_1 dx_2 dx_3 = 8 \int_{B_3^{(1)}(0,1)\cap\{x_i \ge 0, \ i=1,2,3\}} dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$= 8 \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} dx_2 \int_0^{1-x_3-x_2} dx_1 = \frac{4}{3} = \frac{2^3}{3!}.$$

- Vediamo cosa succede ora in dimensione 4:
$B_4^{(1)}(0,1) \equiv \{x \in \mathbb{R}^4 : \ \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| \le 1\} = \{x \in \mathbb{R}^4 : -1 \le x_4 \le 1, \ (x_1, x_2, x_3) \in B_3^{(1)}(0, 1 - |x_4|)\}$
quindi:

$$\mathrm{Vol}(B_4^{(1)}(0,1)) = \int_{B_4^{(1)}(0,1)} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \int_{-1}^1 dx_4 \int_{B_3^{(1)}(0,1-|x_4|))} dx_1 dx_2 dx_3 =$$

Usando il cambio di coordinate $x_i' = \frac{x_i}{1-|x_4|}$ (con $i = 1,2,3$) si ottiene:

$$= \int_{-1}^1 dx_4 \int_{B_3^{(1)}(0,1)} (1 - |x_4|)^3 \, dx_1' dx_2' dx_3' = \int_{-1}^1 \frac{4}{3}(1 - |x_4|)^3 dx_4 = \frac{2^4}{4!}.$$

- Procedendo per induzione su n si ottiene che $\mathrm{Vol}(B_n^{(1)}(0,1)) = \frac{2^n}{n!}$.

Esercizio 5. 1. Osserviamo che $\mathcal{D}_2 = \{0 \le x_2 \le 1, \ 0 \le x_1 \le x_2\}$. Quindi:

$$\mathbb{I}_2 = \int_0^1 dx_2 \int_0^{x_2} x_1 x_2 \, dx_1 \, dx_1 = \frac{1}{8} = \frac{1}{4!!}.$$

2. Definiamo $\mathcal{D}_2(r) \equiv \{0 \le x_1 \le x_2 \le r\}$. Quindi:

$$\mathcal{D}_3 = \{0 \le x_3 \le 1, \ (x_1, x_2) \in \mathcal{D}_2(x_3)\}.$$

Considerando il cambio di variabili $x_i' = \frac{x_i}{x_3}$ con $i = 1, 2$, abbiamo:

$$\mathbb{I}_3 = \int_0^1 x_3 \, dx_3 \int_{\mathcal{D}_2(x_3)} x_1 x_2 \, dx_1 \, dx_2 = \int_0^1 x_3 \, dx_3 \int_{\mathcal{D}_2} x_3^4 \, x_1' \, x_2' \, dx_1' \, dx_2' =$$

$$\int_0^1 x_3^5 \mathbb{I}_2 \, dx_3 = \frac{1}{48} = \frac{1}{6!!}.$$

3. Generalizzando in maniera analoga a quanto fatto nel punto precedente, si dimostra che $\mathbb{I}_n = \frac{1}{(2n)!!}$ [1].

Esercizio 6. Il valore di tale integrale è: $\frac{e^6}{6} - \frac{2e^4}{3} - \frac{e^2}{6}$.
Considerare il cambio di coordinate suggerito:

$$\Phi(x,y) \equiv \begin{cases} u = y - x^3 \\ v = y + x^3 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \Phi^{-1}(u,v) \equiv \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{v-u}{2}} \\ y = \frac{v+u}{2} \end{cases}$$

Il determinante Jacobiano è dato da:

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = \frac{|v-u|^{-\frac{2}{3}}}{3\sqrt[3]{2}}.$$

Per concludere basta osservare che tale trasformazione agisce nel seguente modo sul dominio $\mathcal{T}$:

$$\Phi^{-1}(\mathcal{T}) \equiv \{(u,v) :\ 0 \le u \le 2,\ 2+u \le v \le 6-u\}.$$

[1] Dove $(2n)!! \equiv (2n) \cdot 2(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n n!$