Tutorato III (31/10/2001)

(Esercizi di riepilogo)

Esercizio 1. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:

1. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ ha misura nulla, allora $\overset{o}{X} = \emptyset$;

2. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ con $\overset{o}{X} = \emptyset$, allora X ha misura nulla;

3. Se Q_x , $Q^y \subset \mathbb{R}$ hanno misura (unidimensionale) nulla, allora $Q_x \times Q^y \subset \mathbb{R}^2$ ha misura (bidimensionale) nulla;

4. Se $Q \subset \mathbb{R}^2$ ha misura nulla, allora $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $Q_x \equiv \{y : (x,y) \in Q\}$ e $Q^y \equiv \{x : (x,y) \in Q\}$ sono insiemi di misura nulla in $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Sia $X \subset \mathbb{R}$ l'insieme degli elementi di una successione $\{x_n\}_n$ di numeri reali convergente. Dimostrare che X è Peano Jordan misurabile e $\mathrm{mis}(X) = 0$.
Cosa si può dire se la successione non è convergente?

Esercizio 3. (Teorema di Guldino)
Sia D un insieme Peano Jordan misurabile e connesso, contenuto nel semipiano $< x, z >$ e non intersecante l'asse delle z. Consideriamo il solido Δ ottenuto ruotando D attorno all'asse delle z. Dimostrare che:

$$\mathrm{Vol}(\Delta) = 2\pi \frac{\iint_D x\, dx\, dz}{\iint_D dx\, dz} \mathrm{mis}_2(D).$$

Dedurre che tale volume coincide con la misura dell'insieme D, moltiplicata per la lunghezza della circonferenza percorsa dal suo baricentro.
Applicare questo risultato per calcolare il volume dei seguenti solidi di rotazione:

1. Sfera di raggio r;

2. Toro tridimensionale, ottenuto ruotando il cerchio di centro $(a, 0)$ e raggio $r < a$;

3. Cilindro di altezza h e raggio di base r;

4. Cono circolare retto di altezza h e raggio di base r;

5. Tronco di cono di altezza h, raggio della base inferiore R e della base superiore r.

Esercizio 4. Sia Ω il solido limitato dal cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Calcolare:

$$\iiint_\Omega (x e^{1+z^2} \ln(1 + z^2) - y \sin z + 1)\, dx\, dy\, dz$$

Esercizio 5. Dopo aver disegnato la regione D delimitata dalle superfici

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ 4z = x^2 + y^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

calcolare il seguente integrale:

$$\iint_D x\sqrt{|yz|}\,dx\,dy\,dz.$$

Esercizio 6. Calcolare qualora esista $\int_D xe^{-xy}\,dx\,dy$, dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y,\ x, y > 0\}$.
(Si ricorda che f è integrabile su un dominio D non limitato, se esiste una successione crescente $\{D_k\}_k$ di domini limitati tale che $D = \cup_k D_k$, f è integrabile su D_k per ogni k e $\sup_k \int_{D_k} |f| < \infty$. In tal caso, $\int_D f = \lim_{k\to\infty} \int_{D_k} f$)