Tutorato I (3/10/2001)
(Integrazione in $\mathbb{R}^n$)

Esercizio 1. Sia $f \equiv 0$ su $([0,1] \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$ e $f(x) = \frac{1}{n}$ se $x = \frac{m}{n}$ con $0 \leq m \leq n$ (m e n relativamente primi).

1. Dimostrare che l'insieme di discontinuità di f è $\mathbb{Q} \cap (0,1]$;
2. Dimostrare direttamente (senza usare il Teorema di Vitali-Lebesgue) che $f \in \mathcal{R}([0,1])$.

Esercizio 2. Dimostrare che $A \subset \mathbb{R}^n$ limitato è misurabile secondo Peano-Jordan $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists E_1, E_2$ insiemi elementari t.c. $E_1 \subset A \subset E_2$ e $\text{mis}_n E_2 - \text{mis}_n E_1 < \varepsilon$.
Inoltre $\text{mis}_n A = \inf\{\text{mis}_n E_2 : A \subset E_2, E_2 \text{ insieme elementare}\} = \sup\{\text{mis}_n E_1 : E_1 \subset A, E_1 \text{ insieme elementare}\}$.

Esercizio 3. Dimostrare che se A è un insieme misurabile secondo Peano-Jordan, lo sono anche $\overline{A}$, $\overset{o}{A}$ e ∂A.

Esercizio 4. Dimostrare che $\mathbb{Q}^n \cap E$ (con E rettangolo qualunque, non degenere) è un insieme di misura nulla, non misurabile secondo Peano-Jordan.