Lavoro Guidato N4 di AM2

Esercizio1
Sia $g \in C((0,+\infty))$ una funzione decrescente tale che $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Allora

$$\int_\pi^{+\infty} g(x)dx = +\infty \ \Rightarrow \ \int_\pi^{+\infty} g(x)|\sin x|^\alpha dx = +\infty \quad \forall\, \alpha \geq 0$$

Sugg. Provare:
(i) $g(x)|\sin x|^\alpha \geq g((k+1)\pi)|\sin x|^\alpha \ \ \forall\, x \in [k\pi, (k+1)\pi]$
(ii) il valore di $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|^\alpha$ è indipendente da $k \geq 1$
(iii) $\pi g(k\pi) \geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} g(x)dx \ \forall\ k \geq 1$.

Esercizio2
Studiare la convergenza / assoluta convergenza di

$$\int_0^{+\infty} \sin(e^x)dx \qquad \int_0^{+\infty} \sin(x^\alpha)dx\,,\ \alpha \in \mathbf{R}$$

Sugg. Effettuare opportuni cambi di variabile.

Esercizio3
Sia $\int_0^{+\infty} |f|(x)dx < +\infty$. Allora necessariamente

$$\liminf_{x\to+\infty} |f|(x) = 0$$

Provare con un esempio che l'implicazione

$$\int_0^{+\infty} |f|(x)dx < +\infty \ \Rightarrow \ \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

è falsa.

Esercizio4
Siano $f \in C((0,+\infty))$, $g \in C^1((0,+\infty))$ tali che

$$\sup_{x\geq 1} \left| \int_1^x f(t)dt \right| < +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} |g^{'}|(x)dx < +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

Allora la funzione $f(x)g(x)$ è integrabile in senso improprio in $(1,+\infty)$.
Sugg. Trasformare l'integrale mediante un'integrazione per parti.

Esercizio5
Discutere la convergenza / assoluta convergenza di

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^{\frac{5}{2}}}{x} dx$$