Lavoro Guidato N3 di AM2

Esercizio1
Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\,!\,x^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,!}{n^n} x^n \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} |1+i^n|^n x^n$$

Esercizio2
Siano $f_n \in C([a,b])$. Provare che

$$f_n \to f \text{ uniformemente in } [a,b] \qquad \Rightarrow (\qquad x_n \to x \Rightarrow f_n(x_n) \to f(x))$$

Esercizio3
Siano $f_n \in C([a,b])$ tali che $f_n(x) \to_{n\to+\infty} f(x)$, $|f_n(x)| \le g(x)\ \forall\, n, x$, con

$$\int_0^{+\infty} g(x)dx < +\infty$$

Supponiamo che $\forall\,\epsilon$ esistono intervalli disgiunti I_j^ϵ, $j = 1, \ldots, n_\epsilon$, tali che

$$\sum_{j=1}^{n_\epsilon} l(I_j^\epsilon) \le \epsilon$$

$$\sup_{x \notin \cup_{j=1}^{n_\epsilon} I_j^\epsilon} |f_n - f|(x) \to_{n\to+\infty} 0$$

Allora

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)dx \to \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

Esercizio4
Sia $f : [x_1, +\infty) \to \mathbf{R}$ continua e sia $x_1 < x_2 < ... < x_n < ...$ la successione degli zeri di f.
Supponiamo che la successione $x_n \uparrow +\infty$ e che valga

$$\begin{array}{l} f \quad (x) > 0 \text{ in } (x_1, x_2) \\ f \quad (x) < 0 \text{ in } (x_2, x_3) \\ \quad\ . \\ \quad\ . \\ \quad\ . \\ f \quad (x) > 0 \text{ in } (x_{2n-1}, x_{2n})\ \forall\, n \\ f \quad (x) < 0 \text{ in } (x_{2n}, x_{2n+1})\ \forall\, n \end{array}$$

Posto $a_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(x)|dx$, provare che

$$a_{n+1} < a_n\ \forall\, n \ \Rightarrow \ \text{f è integrabile in senso improprio in } [x_1, +\infty)$$

Sugg. Usare il criterio di Leibniz per serie a segni alterni.

Esercizio5
dedurre dall'esercizio precedente che, se $g \in C((0,+\infty))$ è una funzione positiva tale che $f(x) \downarrow_{x \to +\infty} 0$, allora la funzione $g(x) \sin x$ è integrabile in senso improprio in $[\pi, +\infty)$.
Sugg. Trasformare $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(x) \sin x dx$ mediante il cambio di variabile $x = t - \pi$.