# Lavoro Guidato N1 di AM2

## Integrazione delle funzioni razionali

Sia data la funzione razionale $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono due polinomi di grado rispettivamente $n$ e $m$.
Procediamo nel seguente modo:
1) se $n \geq m$, dividiamo il polinomio $P(x)$ per $Q(x)$ ottenendo l'espressione

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

dove $A(x)$ e $R(x)$ sono due polinomi tali che il grado di $R(x)$ è minore di $m$, e, poiché conosciamo la primitiva di $A(x)$, ci siamo ricondotti a studiare il caso in cui $n < m$;
2) scomponiamo il polinomio $Q(x)$ del denominatore come prodotto di potenze di polinomi di primo grado e di secondo grado con radici complesse coniugate, ossia scriviamo

$$Q(x) = c(x-a)^{\alpha}...(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\mu}...(x^2+lx+s)^{\nu}$$

per opportuni $c$ numero reale, $a, ..., b$ numeri reali distinti, $(p,q), ..., (l,s)$ coppie di numeri reali distinti con, per esempio, $4q - p^2 > 0$, $\alpha$,...,$\nu$ numeri interi positivi;
3) decomponiamo la frazione $\frac{P(x)}{Q(x)}$ per $n < m$ nella forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{c}\left[\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + ...\right.$$

$$... + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + ... + \frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}}$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + ... + \frac{M_{\mu}x+N_{\mu}}{(x^2+px+q)^{\mu}} + ...$$

$$\left. ... + \frac{P_1x+Q_1}{x^2+lx+s} + \frac{P_2x+Q_2}{(x^2+lx+s)^2} + ... + \frac{P_{\nu}x+Q_{\nu}}{(x^2+lx+s)^{\nu}}\right]$$

Per le funzioni razionali elementari $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{(x-a)^k}$, $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ con $k \geq 2$ intero e $4q - p^2 > 0$, abbiamo le seguenti primitive:

$$\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}dx = -\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$$

$$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx \qquad &= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + 2\frac{2B-Ap}{4q-p^2}\int \frac{dx}{(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}})^2+1} \\ &= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}) + C\end{aligned}$$

Per la quarta primitiva, in vista di

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} = -\frac{A}{2(k-1)}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + 4^{k-1}\frac{2B-Ap}{(4q-p^2)^{k-\frac{1}{2}}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^k}\,|_{t=\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}}$$

ci si può ricondurre a studiare $I_k = \int \frac{1}{(x^2+1)^k}$.
Con un'integrazione per parti, si ottiene

$$I_k = I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)}\int x\frac{d}{dx}[\frac{1}{(1+x^2)^{(k-1)}}]dx = \frac{2(k-1)-1}{2(k-1)}I_{k-1} + \frac{1}{2(k-1)}\frac{x}{(1+x^2)^{(k-1)}}$$

L'ultima relazione ci permette di calcolare in modo ricorsivo il valore di $I_k$, tenendo presente che $I_1 = \arctan x$.

Al passo (3) si può sostituire il passo (3bis):
(3bis) decomponiamo la frazione $\frac{P(x)}{Q(x)}$ per $n < m$ nella forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{1}{c}\left[\frac{A}{x-a} + ... + \frac{B}{x-b} + \frac{Mx+N}{x^2+px+q} + ... + \frac{Px+Q}{x^2+lx+s}\right.$$
$$\left. + \frac{d}{dx}\left(\frac{S(x)}{(x-a)^{\alpha-1}...(x-b)^{\beta-1}(x^2+px+q)^{\mu-1}...(x^2+lx+s)^{\nu-1}}\right)\right]$$

ove $S(x)$ è un polinomio a coefficienti da determinare di grado minore di $(\alpha-1) + ... + (\beta-1) + 2(\mu-1) + .. + 2(\nu-1) - 1$.
Per ogni polinomio di primo e secondo grado nella decomposizione di $Q(x)$, mettiamo nello sviluppo in fuzioni razionali elementari di $\frac{Q(x)}{P(x)}$ rispettivamente un termine della forma $\frac{A}{x-a}$ e $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ ed aggiungiamo poi un ulteriore termine allo sviluppo come derivata del quoziente di $S(x)$ con il prodotto dei medesimi fattori del denominatore $Q(x)$ con l'esponente diminuito di uno, ove $S(x)$ è un polinomio opportuno di grado minore del denominatore.

**Esercizio1**
Calcolare la primitiva di $\frac{1}{x^2-2x-3}$.
**Esercizio2**
Calcolare la primitiva di $\frac{3x^2+2x+8}{x^2+6x+11}$.

**Esercizio3**
Calcolare la primitiva di $\frac{8x^3+6x^2+3x+4}{x^2(x^2+1)}$.
**Esercizio4**
Calcolare la primitiva di $\frac{3x^4+5x^3+7x^2+x+2}{(x^2+1)^2}$.