AM2: I Appello-6.11.2001

Domanda 1

Sia $f \in C(\mathbf{R})$, decrescente, con $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Provare che:
(i) $\sum_{j=1}^{+\infty} f(j) \; < +\infty$ se e solo se $\int_0^{+\infty} \; f(x)dx < +\infty$
(ii)$\sum_{j=1}^{+\infty} \; [\int_j^{j+1} \; f(x)dx - f(j+1)]$ converge a un numero positivo minore di $f(1)$
(iii) $\sum_{j=1}^{n} \; f(j) - \; \int_1^{n+1} \; f(x)dx \to_{n\to+\infty} f(1) - \sum_{j=1}^{+\infty} [\int_j^{j+1} \; f(x)dx - f(j+1)]$
(iv) $\sum_{k=1}^{n} \; \frac{1}{k} = \log(n+1) + \sum_{j=1}^{+\infty} [\frac{1}{j} - \log(1+\frac{1}{j})] + \circ(1)$

Domanda 2

Sia $f \in C^\infty([a,b])$. Provare che, se esistono costanti positive M ed r tali che

$$|f^n(x)| \le \frac{Mn!}{r^n}, \;\; \forall x \in [a,b], \; n \in \mathbf{N}$$

allora f é analitica in (a,b).

Domanda 3

(i) Siano $f_n \in C([a,b])$, $\;f_n \to_{n\to+\infty} \; f$ uniformemente in $[a,b]$. Provare che f é continua in $[a,b]$

(ii) Studiare, alla luce di (i), la convergenza/uniforme convergenza di $f_n(x) = (\sin x)^{2n}$ in $[-\pi,\pi]$/in sottointervalli di $[-\pi,\pi]$.

Domanda 4

Provare che il Problema di Cauchy
$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = 0$
$x(0) = c_0, \ldots, x^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$
ove a_j, c_j sono costanti assegnate, ha una ed una sola soluzione, che é analitica in $\mathbf{R}$.

Domanda 5

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$x^{(8)} - 2x^{(4)} + x = \sin t$

Domanda 6

(i) Stabilire se $f(x) = \sin x^2$ é integrabile/assolutamente integrabile in $\mathbf{R}$

(ii) Posto $S(s) := \int_0^{+\infty} e^{-sx^2} \sin x^2 dx,\ \ s \geq 0$, stabilire se S é continua in $[0, +\infty)$ e derivabile in $(0, +\infty)$

(iii) Provare, effettuando un opportuno cambio di variabile, che $\lim_{s\to+\infty} s^k S^{(k)}(s) = 0,\ \ \forall k \in \mathbf{N}$