AM2: Lavoro Guidato 4.10.01

Problema 1

(i) Sia $f : [0, +\infty) \to \Re$ continua e dotata di derivata continua in $(0, +\infty)$. Sia inoltre $f(0) = 0,\ f'(x) > 0, \forall\, x > 0$. Provare che

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx\ + \int_0^b f^{-1}(x)dx \quad \forall b \in f([0, +\infty)),\ a \geq 0$$

(ii) Presa $f(x) = x^p, p > 1$, dedurre che

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1),\ \forall a, b \geq 0$$

(Suggerimento: Provare prima, derivandola, l'identita'

$$xf(x) = \int_0^x f(t)dt\ + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt \quad \forall x \geq 0$$

,

Verificare tale identitá sul grafico, e concludere ispirandosi a considerazioni geometriche.)

Problema 2

Sia g funzione limitata e integrabile in $[0, +\infty)$. Provare che

$$\int_0^{+\infty} g(t)e^{-\frac{t}{n}} \to_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g(t)dt.$$

(Suggerimento: Trasformare l'integrale mediante integrazione per parti e cambio di variabile)

Problema 3

Siano f, g funzioni rispettivamente continue in $[0, +\infty)$ e di classe C^1 in $(0, +\infty)$.
Supponiamo inoltre che f abbia primitiva limitata e g abbia derivata assolutamente integrabile, e, infine, che g tenda a zero per x tendente all'infinito. Provare allora che fg é a integrale convergente.
(Sugerimento: effettuare una integrazione per parti.)

Problema 4

Sia f_n successione di funzioni continue su di un intervallo chiuso e limitato. Supponiamo inoltre che $f_n(x)$ sia una successione decrescente per ogni x dell'intervallo e convergente a zero.

Provare che f_n converge a zero uniformemente sull'intervallo.

(Suggerimento: supporre, per assurdo, che $f_n(x_n) = max f_n$ non converga a zero. Detto x_0 il limite di una sottosuccessione della x_n, usare la continuita' di ogni f_n in x_0, e quindi la monotonia.)