AM2: Lavoro Guidato 18.10.01

Problema 1: Approssimazione di Weierstrass

1.1 Sia f funzione continua in $[0,1]$. Sia

$$p_n(x) = c_n \int_0^1 f(y)[1-(x-y)^2]^n dy, \quad c_n = (\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt)^{-1}$$

Provare che p_n sono polinomi e che, per ogni $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, $p_n \to f$ uniformemente in $[\delta, 1-\delta]$.

1.2 Dedurre che, se f é continua in $[a,b]$, esiste una successione di polinomi che converge uniformemente ad f in $[a,b]$.

(Suggerimenti:
1.1 (i) Provare che $c_n \int_r^1 (1-t^2)^n dt \to_{n\to+\infty} 0 \quad \forall r \in (0,1)$.
(ii) Detto $M := \max_{[0,1]} |f|$, e fissato $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, provare che

$$x \in [\delta, 1-\delta] \Rightarrow |f(x)-p_n(x)| \leq c_n \int_{x-1}^x |f(x)-f(x-t)|(1-t^2)^n dt + 4Mc_n \int_\delta^1 (1-t^2)^n dt$$

(iii) Fissato $\rho \in (0, \frac{1}{2})$, provare che

$$c_n \int_{x-1}^x |f(x)-f(x-t)|(1-t^2)^n dt \leq \int_{-\rho}^\rho |f(x)-f(x-t)|(1-t^2)^n dt + 4Mc_n \int_\rho^{1-\delta} (1-t^2)^n dt$$

(iiii) Fissato $\epsilon > 0$, provare, sciegliendo un ρ opportuno, che il primo membro in (iii) é minore di ϵ se n é abbastanza grande, e quindi usare (iii) per concludere
1.2 Ricondursi a 1.1 mediante la trasformazione $\overline{f} := f(Rx-p)$, R, p opportuni.

Problema 2: la funzione Γ

1.1 Provare che, per tutti gli s positivi, l'integrale $\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t} dt$ é convergente.
1.2 Posto $\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t} dt$, provare che:
(i) $\Gamma(s) \to_{s\to 0^+} +\infty$ e $\Gamma(s) \to_{s\to+\infty} +\infty$
(ii) $\Gamma \in C^\infty((0,+\infty))$ e $\Gamma''(s) > 0 \quad \forall s$
(iii) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$
(iiii) $\Gamma(s+1) = s^{s+1}e^{-s} \int_0^{+\infty} e^{-s(\tau - \log\tau - 1)} d\tau$

(Suggerimento:
1.1 osservare che $t^{s-1}e^{-t} \to_{t\to 0^+} +\infty$

1.2 (i) Provare che $s \le \frac{1}{n} \Rightarrow \int_0^1 t^{s-1}e^{-t}dt \ge \frac{n}{e}$, e $\Gamma(s+1) > s^s \int_s^{+\infty} e^{-t}dt$
(ii) effettuare una integrazione per parti
(iii) effettuare il cambio di variabile $t = s\tau$.

Problema 3: Formula di Stirling

Sia $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$. Provare che

$$\Gamma(s) = s^{s+\frac{1}{2}}e^{-s}[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt + \circ(1)]$$

Suggerimenti:
(i) Provare che

$$\Gamma(s+1) = s^{s+1}e^{-s}\int_0^{+\infty} e^{-s\psi(\tau)}d\tau, \qquad \psi(\tau) := \tau - \log\tau - 1$$

(ii) Fissato $\delta > 0$, e, posto $\epsilon := s^{-\frac{1}{2+\delta}}$, provare che

$$\int_0^{1-\epsilon} e^{-s\psi(\tau)}d\tau \le e^{-\frac{1}{4}s\epsilon^2} = e^{-\frac{1}{4}s^{\frac{\delta}{2+\delta}}}$$

e, scrivendo $[1+\epsilon, +\infty) = [1+\epsilon, R] \cup [R, +\infty)$, R abbastanza grande,

$$\int_{1+\epsilon}^{+\infty} e^{-s\psi(\tau)}d\tau \quad \le \quad Re^{-\frac{1}{4}s^{\frac{\delta}{2+\delta}}} + \int_R^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}s\tau}d\tau$$

(iii) Fissati δ, ϵ come sopra, provare, effettuando il cambio di variabile $\tau = 1-\sigma\epsilon$, che

$$\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} e^{-s\psi(\tau)}d\tau = \epsilon\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{2}s\sigma^2\epsilon^2 + s\psi(\epsilon\sigma)}d\sigma$$

ove $\psi(t) = 0(t^3)$ per t vicino a zero.
(iv) Effettuando l'ulteriore cambio di variabile $\sigma\epsilon^{-\frac{\delta}{2}} = t$, provare che

$$\int_{1-\epsilon(s)}^{1+\epsilon(s)} e^{-s\psi(\tau)}d\tau \quad = \quad s^{\frac{1}{2}}\int_{-\epsilon^{-\frac{\delta}{2}}}^{\epsilon^{-\frac{\delta}{2}}} e^{-\frac{t^2}{2} + s\psi(ts^{-\frac{1}{2}})}dt$$

(v) Usando il fatto che $|t| \le \epsilon^{-\frac{\delta}{2}} \Rightarrow \quad |ts^{-\frac{1}{2}}| \le s^{-\frac{1}{2+\delta}}$, , provare che

$$s\psi(ts^{-\frac{1}{2}}) \le \; cs^{-\frac{1-\delta}{2+\delta}}$$

e concludere che, se $0 < \delta < 1$, è

$$\int_{1-\epsilon(s)}^{1+\epsilon(s)} e^{-s\psi(\tau)}d\tau \quad = \quad s^{\frac{1}{2}}(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \; + \; \circ(1))$$