AM2: Lavoro Guidato 11.10.01

Problema 1

Sia f funzione analitica in (a, b). Provare che

$$f(x_n) = 0, \quad x_n \to \overline{x} \in (a, b) \Rightarrow f(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b)$$

(Suggerimento: provare, usando Rolle, che f si annulla, insieme a tutte le sue derivate, in $\overline{x}$...)

Problema 2

Sia $r = 1$ il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Provare che, se la serie converge in $x = 1$, allora converge uniformemente in $[0, 1]$.

(Suggerimento: Verificare che
(i) $\sum_{k=n}^{N-1} a_n x^n = x^n(a_n + \ldots + a_N) - [a_n(x^N - x^n) + a_{n+1}(x^N - x^{n+1}) + \ldots + a_{N-1}(x^N - x^{N-1})]$
(ii) $a_n(x^N - x^n) + a_{n+1}(x^N - x^{n+1}) + \ldots + a_{N-1}(x^N - x^{N-1}) = (a_n + \ldots + a_{N-1})\,(x^N - x^{N-1}) + (a_n + \ldots + a_{N-2})(x^{N-1} - x^{N-2}) + \ldots + a_n(x^{n+1} - x^n)$
(iii) $|a_n(x^N - x^n) + a_{n+1}(x^N - x^{n+1}) + \ldots + a_{N-1}(x^N - x^{N-1})| \le |a_n + \ldots + a_{N-1}|(x^{N-1} - x^N) + |a_n + \ldots + a_{N-2}|(x^{N-2} - x^{N-1}) + \ldots + |a_n|(x^n - x^{n+1})$
Usare infine la condizione di Cauchy per la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ per stimare la somma a secondo membro in (iii).

Problema 3

Calcolare $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \ \ dx$

(Suggerimento:
(i) provare che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \ \ dx = \lim_{t \to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \ \ e^{-tx} dx$$

(ii) calcolare, effettuando una derivazione sotto segno di integrale, e quindi due integrazioni per parti , $\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \ \ e^{-tx} dx$
(iii) determinare, facendo uso di (ii), $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx$, provare che $\lim_{t \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} dx = 0$, e quindi concludere.

Problema 4: Teorema di Ascoli-Arzela'

Sia f_n successione di funzioni dotate di derivata continua in $[a, b]$.
Provare che, se

$$\exists M : |f_n(x)| + |f_n'(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b], \quad \forall n$$

allora f_n possiede una sottosuccessione uniformemente convergente in $[a, b]$.

(Suggerimento:

(i) (diagonalizzazione di Cantor) fissato $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ denso in $[a, b]$, estrarre da $f_n(x_1)$ una sottosuccessione convergente $f_{\phi_1(k)}(x_1)$, ϕ_1 funzione strettamente crescente dei naturali in se. Estrarre quindi dalla $f_{\phi_1(k)}(x_2)$ una sottosuccessione convergente $f_{\phi_1(\phi_2(k))}(x_2)$. Provare che, iterando la procedura, si perviene ad una successione di indici $n_j = \phi_1 \circ \ldots \circ \phi_j(j)$ tale che $f_{n_j}(x_k)$ converge, al tendere di j all'infinito, per ogni k.

(ii) posto $f(x_k) = \lim_{j \to +\infty}(x_k)$, provare che $|f(x_h) - f(x_k)| \leq M|x_h - x_k|$, $\forall h, k$, e prolungare quindi f in modo continuo a tutto $[a, b]$.

(ii) detto $\overline{f}$ il prolungamento continuo di f a tutto $[a, b]$, provare che f_{n_j} converge uniformemente a $\overline{f}$.