Tutorato di AM1b limiti di successioni

Fabrizio Fanelli

1) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\tan(1/n)}{\tan\left(\frac{2}{n^2}\right)}\right]$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(1/n)}{\cos(1/n)}\frac{\cos\left(\frac{2}{n^2}\right)}{\sin\frac{2}{n^2}}\frac{n}{n}\frac{n^2}{2}\frac{2}{n^2} =$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cos\frac{2}{n^2}}{\cos\frac{1}{n}}\right)\left(\frac{n\sin\frac{1}{n}}{\frac{2}{n^2}\sin\frac{2}{n^2}}\right)\left(\frac{1}{n}\frac{n^2}{2}\right) = +\infty$

$\Big($limite notevole del tipo $\frac{\sin a_n}{a_n}\to 1$ se $a_n\to 0$ $\Big)$.

2) $\lim_{n\to\infty} n^2\sin\frac{n+1}{n^2}\frac{\sqrt[n]{|\sin n|}}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}\sin\frac{n+1}{n^2}\sqrt[n]{|\sin n|} = 1.$

3) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(\log n)^2}{\sqrt{n^5+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5}}{\sqrt{n^5}}\left(\frac{\frac{n^2(\log n)^2}{\sqrt{n^5}}}{1+\frac{1}{\sqrt{n^5}}}\right) = 1$

Limite notevole del tipo : $\frac{(\log a_n)^\alpha}{a_n^\beta}\to 0$ se $a_n\to+\infty$

4) $\lim_{n\to\infty}\frac{n2^n}{3^n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(3/2)^n} = 0$ un limite notevole del tipo $\frac{n^\alpha}{a^n}\to 0\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$ e $\forall\ a > 1$.

5)Dimostrare che : $\lim_{n\to\infty} n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = 1/2$

$n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right) = n^2(2\sin^2\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2}\left(2n\sin\frac{1}{2n}\right)^2 \to \frac{1}{2}1^2 = \frac{1}{2}$

6) $\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+n+n^3)-3\log n}{n(1-\cos\frac{1}{n^2})}$

Primo passo procedendo come sopra avró che : $n^4\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)\to\frac{1}{2}$

Secondo passo $n^3 \log\left(\frac{n^3+n+1}{n^3}\right) = (n{+}1)\log\left[\left(1+\frac{n+1}{n^3}\right)^{\frac{n^3}{n+1}}\right] \to \infty$

poiché l'argomento del logaritmo tende ad e

(limite notevole del tipo $\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} \to e^x \; \forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall a_n \to +\infty$) .

Mettendo insieme i due passi noto che il nostro limite è $= +\infty$.

7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left|\sin\frac{1}{n}\right|\right)^n$

$$= \left[\left(1+\left|\sin\frac{1}{n}\right|\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}}\right]^{n\sin\frac{1}{n}} \to e^1 = e$$

8) $\lim\limits_{n\to\infty} n\log_{10}(1+2/n)$

$n\log_{10}(1+2/n) = \log_{10}\left[(1+2/n)^n\right] \to 2\log_{10} e$
(limite notevole $(1+a/n)^n \to e^a$)

9) $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln(1+1/n)$

simile al precedente .

10) $\lim\limits_{n\to\infty} n(e^{(1/n)}-1)$

posto $a_n = e^{1/n}-1$, si ha $e^{1/n} = a_n + 1$ e , passando ai logaritmi , $1/n = \log a_n + 1$, allora il nostro limite diventa $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\log a_n + 1} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1/a_n \log(1+a_n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log\left[(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}\right]} = \frac{1}{\log e} = 1.$$

11) $\lim\limits_{n\to\infty} n\log_a(1+1/n) \qquad \forall a \in \mathbb{R}\ ,\ a>0,\ a\neq 1$

ragionando come in 1) si ottiene $\log_a e$

12) $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{1/n}-1)n \qquad \forall a\in\mathbb{R}\ ,\ a>0\ ,\ a\neq 1$

Ragionando come in 3) si ottiene $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{1/n}-1)n = \frac{1}{\log a}$

13) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left[\log(1+1/n)+\log(1-1/n)\right]$

$$= \lim_{n\to\infty} n^2 \left[\log\left(1+1/n\right)(1-1/n)\right] = \lim_{n\to\infty} \log\left[(1-1/n^2)\right]^{n^2} = \log e^{-1} = -1$$

14) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin(3/n)}{\sin(2/n)}$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3/n}{3/n}\right)\left(\frac{2/n}{2/n}\right)\frac{\sin(3/n)}{\sin(2/n)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sin(3/n)}{3/n}\right)\left(\frac{2/n}{\sin(2/n)}\right)\frac{3/n}{2/n} = 1 \cdot 1 \cdot 3/2 = 3/2$$