Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2001/2002

ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli
(Prof. S. Gabelli)

TUTORATO 6 - 10 Ottobre 2001

1. Sia G un gruppo abeliano e sia $\phi : G \longrightarrow G$ l'applicazione definita da $x \longrightarrow x^n$. Mostrare che ϕ è un omomorfismo di gruppi. Quando è un automorfismo?

2. Mostare che tutti e soli gli automorfismi di $\mathbb{Z}_n$ sono le applicazioni $\phi : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ definite da $\bar{x} \longrightarrow a\bar{x}$, dove $\bar{a} = \phi(\bar{1})$ è invertibile in $\mathbb{Z}_n$.

3. Determinare la struttura dei gruppi $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_5)$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_8)$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{12})$. Quali tra questi gruppi sono isomorfi?

4. Sia $\phi : \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n) \longrightarrow U(\mathbb{Z}_n)$ l'applicazione definita da $\phi \longrightarrow \phi(\bar{1})$. Mostrare che ϕ è un isomorfismo.

5. Sia K un gruppo di Klein. Costruire $\mathrm{Aut}(K)$ e mostrare che esso è un gruppo isomorfo a $\mathbf{S}_3$.

6. Sia K un gruppo di Klein. Usando l'esercizio precedente, mostrare che nessun sottogruppo di K è caratteristico, benché ogni sottogruppo di K sia normale.

7. Sia K un gruppo di Klein. Determinare tutti i possibili omomorfismi di K in $\mathbb{Z}_4$ e di $\mathbb{Z}_4$ in K.