

# AL2 Algebra (2<sup>o</sup> Modulo)

A.A. 2001/2002

Prof. Stefania Gabelli

## Gruppi e Anelli

### 1. Gruppi

Operazioni binarie e loro proprietà. Elementi neutri e simmetrizzabili. Unicità dell'elemento neutro e del simmetrico di un elemento. Notazione additiva e moltiplicativa.

Gruppi. Il gruppo additivo  $(Z_n)$  delle classi resto modulo  $n$ . Il gruppo moltiplicativo  $(U(Z_n), \cdot)$ .

Il gruppo delle corrispondenze biunivoche di un insieme in se stesso. Il gruppo  $S_n$ : decomposizione di una permutazione in cicli disgiunti, parità, ordine, classi coniugate.

Ordine di un gruppo. Gruppi finiti. Tabelle di moltiplicazione. Gruppi di Klein. Gruppi diedrali. Il gruppo delle unità dei quaternioni.

Sottogruppi. Potenze di un elemento. Sottogruppi generati da un sottoinsieme. Sottogruppi generati da un elemento. Ordine di un elemento. I sottogruppi di  $Z$ .

Gruppi ciclici. Generatori di un gruppo ciclico. I sottogruppi di un gruppo ciclico sono ciclici.

Classi laterali di un sottogruppo. Teorema di Lagrange. Teorema di Eulero-Fermat. Sottogruppi normali. Centro di un gruppo. Gruppo quoziente.

Omomorfismi tra gruppi. Immagine e nucleo di un omomorfismo. Relazione di equivalenza associata al nucleo. Controimmagine di un elemento.

Teorema di decomposizione di un omomorfismo tra gruppi. Teorema di isomorfismo.

Ogni gruppo ciclico è isomorfo a  $Z$  oppure a  $Z_n$ , per un opportuno  $n$ .

Corrispondenza tra sottogruppi tramite un omomorfismo.

Automorfismi di un gruppo. Omomorfismi e automorfismi di gruppi ciclici. Coniugio e automorfismi interni. Teorema di Cayley.

### 2. Anelli

Anelli. Elementi invertibili e zero divisori.

Anelli commutativi, unitari, interi. Domini. Campi. Anelli e campi di numeri.

L'anello  $Z_n$  e il campo  $Z_p$ ,  $p$  primo.

Sottoanelli. Ideali. Ideali generati da un sottoinsieme e ideali principali. Ideali di anelli di polinomi. Ideali primi e massimali.

Classi laterali di un ideale. Anelli quoziente. Quozienti di anelli di polinomi.

Omomorfismi tra anelli. Immagine e nucleo di un omomorfismo. Relazione di equivalenza associata al nucleo. Controimmagine di un elemento.

Teorema di decomposizione di un omomorfismo tra anelli. Teorema di isomorfismo. Corrispondenza tra ideali tramite un omomorfismo.

Caratteristica di un anello e di un campo. Sottocampo fondamentale.

Il campo dei quozienti di un dominio.

Divisibilità in un dominio. MCD e mcm. Domini euclidei. Un dominio euclideo è a ideali principali e a fattorizzazione unica.

Applicazione della teoria degli anelli euclidei ad anelli di polinomi a coefficienti in un campo e all'anello  $Z[i]$ .

Il Lemma di Gauss. Anelli di polinomi su domini a fattorizzazione unica.

Estensioni di campi. Elementi algebrici e trascendenti. Estensioni semplici di campi numerici. Il campo di spezzamento di un polinomio a coefficienti numerici.

Estensioni semplici simboliche. Costruzione di radici di polinomi.

## TESTI CONSIGLIATI

- [1] G.M. PIACENTINI CATTANEO, *Algebra, un approccio algoritmico*. Decibel – Zanichelli, (1996).  
 [2] M. FONTANA – S. GABELLI, *Esercizi di Algebra*. Aracne, (1993).  
 [3] R. PROCESI CIAMPI – R. ROTA, *Algebra Moderna. Esercizi*. Veschi, (1992).

## MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO
- esame finale	scritto	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
	orale	<input checked="" type="checkbox"/> SI	<input type="checkbox"/> NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		<input type="checkbox"/> SI	<input checked="" type="checkbox"/> NO

L'esame consiste in una prova scritta e un colloquio orale, volto ad accertare l'acquisizione da parte dello studente dei concetti e dei metodi illustrati nel corso.

Gli studenti che abbiano superato la prova scritta possono sostenere la prova orale in uno qualsiasi degli appelli di Novembre, Gennaio, Aprile Per sostenere l'esame orale nella sessione di Giugno è invece necessario ripetere la prova scritta.