Universitá degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002
ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli
Lavoro guidato (a cura di Giampaolo Picozza)
Martedí 16 ottobre

1. Sia K un campo e siano $f(x), g(x) \in K[x]$. Dimostrare che, se $I = (f(x), g(x))$ è l'ideale generato da $f(x)$ e $g(x)$, allora $I = (MCD(f(x), g(x))$.

2. Sia K un campo e siano $f(x), g(x) \in K[x]$. Siano $I = (f(x))$, $J = (g(x))$. Dimostrare che $I \cap J = (m.c.m.(f(x), g(x))$.

3. Siano $f(x) = x^2 - 1, g(x) = x^2 + x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Determinare un generatore per l'ideale $(f(x), g(x))$ e per l'ideale $(f(x)) \cap (g(x))$.

4. Sia $I = (3, x)$ l'ideale di $\mathbb{Z}[x]$ generato da 3 e da x. Dimostrare che $\mathbb{Z}[x]/I$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_3$.

5. Sia $I = (x) \subseteq \mathbb{Z}[x]$. Dimostrare che I è un ideale primo, ma non è un ideale massimale.

6. Sia $A = \mathbb{Q}[x]/I$, dove $I = (x^3 - 2)$. Determinare:

(i) se I è primo;

(ii) se I è massimale;

(iii) se $x^2 + 2 + I \in A$ è invertibile e, in caso affermativo, calcolarne l'inverso.