

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002**  
**ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli**  
**Lavoro guidato (a cura di Giampaolo Picozza)**  
Giovedì 4 ottobre

1. Determinare tutti i sottogruppi normali di  $\mathbf{S}_3$ .
2. Sia  $G$  un gruppo e  $H$  un suo sottogruppo di indice 2. Dimostrare che  $H$  è normale in  $G$ .
3. Determinare tutti gli omomorfismi da  $\mathbf{S}_3$  a  $\mathbb{Z}_4$  e da  $\mathbb{Z}_4$  a  $\mathbf{S}_3$ .
4. Dimostrare che, se  $\phi : G \rightarrow G'$  è un omomorfismo, allora, per ogni  $g \in G$ , l'ordine di  $\phi(g)$  divide l'ordine di  $g$ .
5. Dimostrare che, se  $\phi : G \rightarrow G'$  è un isomorfismo, allora, per ogni  $g \in G$ , l'ordine di  $\phi(g)$  è uguale all'ordine di  $g$ .
6. Verificare quali fra i seguenti gruppi sono isomorfi:  $U(\mathbb{Z}_5), U(\mathbb{Z}_8), U(\mathbb{Z}_9), U(\mathbb{Z}_{10})$ .
7. Dimostrare che un gruppo ciclico con  $n$  elementi è isomorfo a  $\mathbb{Z}_n$ .
8. Determinare tutti gli omomorfismi da  $\mathbb{Z}_{12}$  a  $\mathbb{Z}_8$ .