Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2001/2002

ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli
(Prof. S. Gabelli)

TUTORATO 9 - 22 Ottobre 2001

1. Sia $a \in \mathbb{C}$ e si consideri l'omomorfismo di anelli

$$v_a : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathbb{C}, f(X) \to f(a) .$$

Determinare esplicitamente il nucleo e l'immagine di v_a quando

$$a = 3\sqrt{4}\,,\ a = 3 + 2i\,,\ a = e\,,\ a = \sqrt{\pi + 1}.$$

In quali casi $\mathrm{Im}(v_a)$ è un campo?

2. Siano $f(X) = X^3 + aX^2 + \bar{5}X + \bar{3} \in \mathbb{Z}_7[X]$ e $I = (f(X))$.

Determinare se l'anello quoziente $Z_7[X]/I$ è un campo per i valori $a = \bar{4}$ e $a = \bar{5}$. In caso affermativo determinare l'inverso della classe del polinomio $g(X) = X^2 + \bar{2}$.

3. Sia fissata la matrice :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$$

e sia $I = \alpha^0$ la matrice identità di $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

Si consideri l'applicazione:

$$\phi : \mathbb{Q}[X] \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})\,, \quad \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \to \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i.$$

Verificare che ϕ è un omomorfismo di anelli ed esplicitare $\mathrm{Im}(\phi)$ e $\mathrm{Ker}(\phi)$. Stabilire infine se $\mathrm{Im}(\phi)$ è un campo.

4. Sia $R := A[X]/I$. Stabilire se R un dominio o un campo in ciascuno dei seguenti casi :

(a) $A := \mathbb{Q}$, $I := (X^2 - 1)$; (b) $A := \mathbb{Q}$, $I := (X^3 + X + 1)$;
(c) $A := \mathbb{Z}$, $I := (2X^2 + 2)$; (d) $A := \mathbb{Z}_3$, $I := (X^3 + X + \bar{1})$.

Determinare inoltre gli ideali massimali di R .

5. Sia $f(X) = X^3 + \bar{3}X + \bar{3} \in \mathbb{Z}_5[X]$ e sia E l'anello quoziente di $\mathbb{Z}_5[X]$ modulo l'ideale $(f(X))$.

Mostrare che E è un campo contenete isomorficamente $\mathbb{Z}_5$ e che $f(X)$ ha una radice ξ in E.

Determinare poi l'inverso in E di ξ^2 e $\xi + \bar{1}$.

6. Sia $f(X) := X^3 + \bar{2}X^2 + \bar{4}X + \bar{2} \in \mathbb{Z}_5[X]$.

Verificare che $f(X)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_5[X]$ e costruire un'estensione semplice E di $\mathbb{Z}_5$ nella quale $f(X)$ abbia una radice ξ.

Determinare poi in E l'inverso moltiplicativo dell'elemento: $\xi^2 + \bar{3}\xi + \bar{1}$.

7. Determinare il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ dei polinomi
$X^3 - 1,\ X^2 + X + 1,\ X^4 + 2,\ X^4 - 2,\ X^4 - X^3 - 4X^2 + 5X - 5.$

8. Determinare il campo di spezzamento su $\mathbb{Z}_3$ del polinomio

$$X^4 + \bar{2}X^2 + \bar{2}X + \bar{2}.$$