Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2001/2002

ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli
(Prof. S. Gabelli)

TUTORATO 8 - 19 Ottobre 2001

1. Si considerino in $\mathbb{Z}$ gli ideali $I = 280\mathbb{Z}$ e $J = 60\mathbb{Z}$. Determinare gli ideali $I + J$, IJ e $I \cap J$.

2. Si considerino in $\mathbb{Q}[X]$ gli ideali $I = (f(X))$ e $J = (g(X))$, dove
$f(X) = 2X^3 + X^2 + X - 1$ e $g(X) = 2X^3 - 7X^2 + 7X - 2$.
Determinare gli ideali $I + J$, IJ e $I \cap J$.

3. Determinare tutti gli ideali di $\mathbb{Z}_{60}$ e stabilire quali tra essi sono massimali.
Determinare inoltre la struttura degli anelli quozienti $\frac{\mathbb{Z}_{60}}{5\mathbb{Z}_{60}}$ e $\frac{\mathbb{Z}_{60}}{15\mathbb{Z}_{60}}$. Quanti elementi hanno? Sono integri? Sono campi?

4. Sia $A := \{a/b \in \mathbb{Q};\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \text{ e } 3 \text{ non divide } b\}$.
Verificare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$ e che l'anello quoziente $A/3A$ è un campo isomorfo a $\mathbb{Z}_3$.

5. Si consideri l'applicazione
$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7$ definita da $a \to ([a]_3, [a]_7)$
Mostrare che φ è un omomorfismo suriettivo di anelli, determinare $\mathrm{Ker}(\varphi)$ ed applicare il Teorema di omomorfismo per gli anelli.

6. Sia A l'anello delle applicazioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ dotato delle operazioni di somma e prodotto definite puntualmente, cioè:
$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \ ; \ (fg)(x) := f(x)g(x) \ ,$$
per ogni x in $\mathbb{R}$. Sia inoltre a un numero reale fissato.
Mostrare che l'insieme $I_a = \{f \in A : f(a) = 0\}$ è un ideale massimale di A (Suggerimento: Considerare l'omomorfismo $A \longrightarrow \mathbb{R},\ f \to f(a)$).

7. Determinare per quali valori di n l'ideale (n, X) è primo o/e massimale in $\mathbb{Z}[X]$.

8. Studiare l'anello quoziente $A = \frac{\mathbb{Z}_5[X]}{(X^2+aX+\bar{1})}$, determinando per quali valori del parametro $a \in \mathbb{Z}_5$ esso è un campo.

Determinare inoltre tutti gli ideali di A nel caso in cui $a = \bar{0}$ e $a = \bar{1}$.

9. Sia $f(X) = X^3+\bar{2}X^2+\bar{4}X+\bar{2} \in \mathbb{Z}_5[X]$. Mostrare che l'anello quoziente $A = \frac{\mathbb{Z}_5[X]}{(f(X))}$ è un campo con un numero finito di elementi e determinare esplicitamente tali elementi (in forma generica).

Determinare inoltre l'inverso della classe di $g(X) = X^3 + \bar{3}X^2 + \bar{7}X + \bar{3}$.

10. Determinare tutti gli ideali dell'anello prodotto diretto $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Stabilire inoltre quali di essi sono primi o/e massimali.