Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2001/2002

ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli
(Prof. S. Gabelli)

TUTORATO 11 - 29 Ottobre 2001

1. Mostrare che l'intersezione di due ideali primi che non siano l'uno contenuto nell'altro non è un ideale primo.

2. Mostrare che un ideale principale è primo se e soltanto se è generato da un elemento primo.

3. Mostrare che due ideali principali (a) e (b) di un dominio A coincidono se e soltanto se a e b sono associati.

4. Mostrare che M è un ideale massimale di un dominio A se e soltanto se $M + (a) = A$ per ogni $a \in A \setminus M$. Usare questo fatto per dimostrare che un ideale massimale è primo.

5. Sia A un dominio euclideo rispetto alla valutazione $v : A \longrightarrow \mathbb{N}$. Mostrare che

(a) $v(1) \leq v(a)$, per ogni $a \in A^*$.

(b) $a \in A^*$ è invertibile se e soltanto se $v(a) = v(1)$.

(c) Se a e b sono associati in A, allora $v(a) = v(b)$.

(d) Se $a, b \in A^*$ sono tali che a divide b e $v(a) = v(b)$, allora a e b sono associati.

(e) Se $a, b \in A^*$ e b non è invertibile, allora $v(a) < v(ab)$.

6. Sia A un dominio e sia I un ideale di A. Mostrare che

(a) L'insieme $I[X]$ dei polinomi a coefficienti in I è un ideale di $A[X]$.

(b) Se P è un ideale primo di A, l'ideale $P[X]$ è primo in $A[X]$. In particolare, un elemento primo di A è primo anche in $A[X]$.

(Suggerimento: Considerare l'omomorfismo $A[X] \longrightarrow \frac{A}{P}[X]$ definito da $a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \rightarrow (a_0 + P) + (a_1 + P)X + \ldots + (a_n + P)X^n$)

(c) Un elemento di A è irriducibile in $A[X]$ se e soltanto se lo è in A.

7. Sia K un campo. Mostrare che l'ideale I di $K[X,Y]$ generato da X e Y , $I=(X,Y)$, è un ideale massimale. Mostrare inoltre che I non è principale.

8. Sia K un campo e sia $A=\frac{K[X,Y,Z]}{I}$, dove I è l'ideale principale di $K[X,Y,Z]$ generato dal polinomio $XY-Z^2$.

Mostrare che gli elementi X,Y e Z sono primi in $K[X,Y,Z]$, mentre le classi di X,Y e Z sono elementi irriducibili ma non primi in A.