Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a.2001/2002

ALGEBRA 2 - Gruppi e Anelli
(Prof. S. Gabelli)

ESERCITAZIONE - 12 Ottobre 2001

LISTA 1

1. Mostrare che, se G è un gruppo finito di ordine pari, allora G ha un elemento di ordine 2.

2. Sia X un sottoinsieme finito di un gruppo G. Mostrare che, se $X \cdot X = \{xy \mid x, y \in X\} = X$, allora X è un sottogruppo di G.

3. Mostrare che il centro di un gruppo è un sottogruppo caratteristico.

4. Sia G un gruppo e sia $\gamma_g : G \longrightarrow G, x \longrightarrow g^{-1}xg$ l'automorfismo interno di G associato a g.

Mostrare che l'applicazione $G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ definita da $g \longrightarrow \gamma_g$ è un omomorfismo di gruppi ed applicare il così detto primo teorema (o teorema fondamentale) di omomorfismo.

5. Mostrare che ogni gruppo di ordine primo è ciclico.

6. Siano H e K due sottogruppi di un gruppo G. Mostrare che l'insieme HK è un sottogruppo di G se e soltanto se $HK = KH$.

7. Mostrare che un sottogruppo N di un gruppo G è normale se e soltanto se esso è unione di classi coniugate.

8. Siano H e N due sottogruppi di un gruppo G. Mostrare che, se N è normale, allora $HN =< H \cup N >$.

Se $m, n \geq 2$, determinare un generatore del gruppo $< n\mathbb{Z} \cup m\mathbb{Z} >$.

9. Sia G un gruppo e siano $x, y \in G$ due elementi di ordine r ed s rispettivamente. Mostrare che, se $xy = yx$, allora l'ordine di xy divide $m = m.c.m.(r, s)$. Se inoltre r ed s sono coprimi, allora xy ha ordine m.

10. Sia H un sottogruppo di $\mathbf{S}_n$. Mostrare che, se in H c'è una permutazione dispari, allora l'ordine di H è pari.

11. Sia $G =< g >$ un gruppo ciclico di ordine n. Determinare tutti gli automorfismi di G.

12. Mostrare che in un gruppo due elementi coniugati hanno lo stesso ordine.

13. Mostrare che la funzione inversa di un isomorfismo è un isomorfismo.

14. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo di ordine 2. Mostrare che H è normale in G se e soltanto se H è contenuto nel centro di G.

15. Siano H e K due sottogruppi normali di un gruppo G. Mostrare che, se $H \cap K = \{e\}$, allora $hk = kh$, per ogni $h \in H$ e $k \in K$.

16. Siano H e K due sottogruppi normali di un gruppo G. Mostrare che $H \cap K$ è un sottogruppo normale di G.

17. Siano H e K due sottogruppi finiti di un gruppo G. Mostrare che, se H e K hanno ordini coprimi, allora $H \cap K = \{e\}$.

18. Mostrare che due elementi x, y di un gruppo G sono coniugati se e soltanto se esistono $a, b \in G$ tali che $x = ab$ e $y = ba$.

Dedurne che, per ogni $h, g \in G$, gli elementi hg e gh hanno lo stesso ordine.

19. Sia G un gruppo commutativo. Dimostrare che l'insieme degli elementi di G che hanno ordine finito è un sottogruppo di G.

20. Sia $\phi : G \longrightarrow G'$ un omomorfismo suriettivo di gruppi. Dimostrare che, se G è commutativo (rispettivamente ciclico), allora G' è commutativo (rispettivamente ciclico). Mostrare inoltre che vale il viceversa se ϕ è un isomorfismo.

21. Sia G un gruppo e sia $x \in G$ un elemento fissato. Mostrare che l'insieme $C(x) = \{g \in G \,|\, xg = gx\}$ è un sottogruppo di G (tale gruppo si dice il *centralizzante* di x in G). Mostrare inoltre che $Z(G) = \cap_{x \in G} C(x)$.

22. Siano G un gruppo, $x \in G$ un elemento fissato e $C(x) = \{g \in G \mid xg = gx\}$ il centralizzante di x. Mostrare che $g^{-1}xg = h^{-1}xh$ se e soltanto se $hg^{-1} \in C(x)$. Dedurne che, se G è finito, il numero dei coniugati di x divide l'ordine di G.

LISTA 2

1. Determinare tutti i gruppi quoziente del gruppo $\mathbb{Z}_{21}$.

2. Determinare tutti i sottogruppi di $\mathbf{A_4}$.

3. Determinare almeno un sottogruppo di $\mathbf{S_4}$ isomorfo al gruppo delle isometrie del triangolo equilatero.

4. Sia C_{12} il gruppo delle radici dodicesime dell'unità. Mostrare che la seguente applicazione è un omomorfismo di gruppi ed applicare il teorema fondamentale di omomorfismo:
$(\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (C_{12}, \cdot)$, $\quad x \longrightarrow \zeta^x$, dove dove $\zeta \in C_{12}$ è una radice terza dell'unità fissata.

5. Mostrare che la seguente applicazione è un omomorfismo di gruppi ed applicare il teorema fondamentale di omomorfismo:
$(\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\quad x \longrightarrow cos(2\pi x) + isen(2\pi x)$.

6. Mostrare che la seguente applicazione è un omomorfismo di gruppi ed applicare il teorema fondamentale di omomorfismo:
$(\mathbb{C}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\quad x \longrightarrow \frac{x}{|x|}$.

7. Mostrare che la seguente applicazione è un omomorfismo di gruppi ed applicare il teorema fondamentale di omomorfismo:
$(\mathbb{C}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $\quad x \longrightarrow |x|$.

8. Mostrare che la seguente applicazione è un omomorfismo di gruppi ed applicare il teorema fondamentale di omomorfismo:
$(\mathbb{C}^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot) \times (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\quad x \longrightarrow (\frac{x}{|x|}, |x|)$.

9. Determinare il gruppo degli automorfismi di $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.

10. Determinare il gruppo degli automorfismi di $(\mathbb{Z}_{15}, +)$.

11. Determinare il gruppo degli automorfismi di $(U(\mathbb{Z}_7), \cdot)$.

12. Determinare il gruppo degli automorfismi di $(U(\mathbb{Z}_9), \cdot)$.

13. Determinare almeno un omomorfismo suriettivo $\phi : \mathbf{S_4} \longrightarrow \mathbf{S_3}$.

14. Determinare almeno un omomorfismo $\phi : \mathbf{D_4} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\mathbf{6}}$.

15. Determinare tutti gli omomorfismi $\phi : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_5$.

16. Determinare tutti gli omomorfismi $\phi : \mathbb{Z}_{21} \longrightarrow \mathbb{Z}_{14}$.

17. Determinare tutti gli automorfismi di $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$.

18. Determinare tutti gli omomorfismi $\phi : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \longrightarrow \mathbb{Z}_6$.

19. Determinare tutti gli omomorfismi $\phi : \mathbf{H} \to \mathbf{V_4}$, dove $\mathbf{H}$ è il gruppo dei quaternioni e $\mathbf{V_4}$ è il sottogruppo di Klein di $\mathbf{A_4}$.

20. Determinare tutti gli omomorfismi $\phi : \mathbf{H} \to \mathbb{Z}_{\mathbf{4}}$, dove $\mathbf{H}$ è il gruppo dei quaternioni.

21. Determinare le classi coniugate di $\mathbf{S_4}$ e di $\mathbf{A}_4$.

22. Determinare le classi coniugate di $\mathbf{D_4}$.

23. Determinare il centro di $\mathbf{D_n}$, per ogni n.

24. Determinare tutti i sottogruppi normali di $\mathbf{S_4}$ e di $\mathbf{A}_4$.

25. Determinare quali tra i seguenti gruppi sono isomorfi: $\mathbb{Z}_{\mathbf{8}}, \mathbf{H}, \mathbf{D_4}, C_8, \mathbf{S_8}$, dove $\mathbf{H}$ è il gruppo dei quaternioni e C_8 il gruppo delle radici ottave dell'unitá.

26. Determinare la classe di coniugio della permutazione $(23)(541)$ di $\mathbf{S_5}$. Verificare inoltre che $(123)(45)$ sta in questa classe e trovare almeno due permutazioni diverse σ tali che $\sigma^{-1}(23)(541)\sigma = (123)(45)$.

27. Stabilire quali tra le seguenti permutazioni di $\mathbf{S_6}$ sono coniugate ad $\alpha = (12)(34)(56)$: $(123)(456)$, $(13)(2645)$, $(13)(26)(54)$.

Trovare poi almeno due permutazioni diverse σ tali che $\sigma^{-1}\alpha\sigma$ sia la stessa permutazione.