Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2001/2002
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato
Mercoledi 24 ottobre

1. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che:

1. per ogni $n \geq 2$ si ha che
$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3};$$
2. per ogni $n \geq 1$ si ha che
$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n} = 3^n;$$
3. per ogni $n \geq 1$ si ha che
$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

2. Sia a un numero intero. Utilizzando il principio di induzione forte si dimostri che per ogni $n \geq 2$ si ha che
$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1).$$

3. Calcolare:

1. $(1-2i)(1+3i)^{-1}$;
2. i^{49}, $(-i)^{58}$;
3. $\frac{(1-i)(2+i)}{(1-2i)(1+i)}$;
4. $(1-i)^5$ (utizzando $(a+b)^n = \sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}a^{n-h}b^h$) ;
5. $(\sqrt{3}-i)^{13}$ (senza utilizzare $(a+b)^n = \sum_{h=0}^{n}\binom{n}{h}a^{n-h}b^h$) .