

**Università degli Studi Roma Tre**  
**Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2001/2002**  
**AL1 - Algebra 1, fondamentali**  
**Tutorato**  
Mercoledì 10 ottobre

**1.** Siano  $f_1 : A \longrightarrow X_1$  e  $f_2 : A \longrightarrow X_2$  applicazioni; siano  $p_1 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_1$  e  $p_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_2$  le proiezioni canoniche.

(i) Provare che esiste una ed una sola applicazione  $f : A \longrightarrow X_1 \times X_2$  tale che  $p_1 \circ f = f_1$  e  $p_2 \circ f = f_2$ .

(ii) E' vero che  $f$  è iniettiva se e solo  $f_1$  oppure  $f_2$  è iniettiva?

**2.** Sia  $X$  un insieme con 3 elementi.

(i) Stabilire quante relazioni (binarie) si possono considerare in  $X$ .

(ii) Stabilire quante di esse sono relazioni d'equivalenza.

**3.** Nell'insieme  $\mathcal{P}(\mathbf{N})$  si consideri la seguente relazione:

$$A\sigma B \iff A - B \text{ è un insieme finito.}$$

Stabilire quali tra le proprietà riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva e totale sono soddisfatte da  $\sigma$ .

**4.** Sia  $g : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$  l'applicazione definita da  $g(n) = \text{MCD}(n, 15)$ .

(i) Trovare  $\text{Im}(g)$  e verificare che  $f$  non è iniettiva.

(ii) Descrivere tutte le classi di equivalenza di  $\mathbf{N}$  rispetto alla relazione nucleo di  $g$ .

**5.** Nell'insieme dei numeri naturali positivi si consideri la seguente relazione d'equivalenza  $\rho$  :

$n\rho m$  se e solo se  $n$  e  $m$  hanno lo stesso numero di cifre nella usuale scrittura decimale.

(i) Determinare  $[1]_\rho$ ,  $[10]_\rho$  e  $[10^k]_\rho$  con  $k \geq 2$ .

(ii) Determinare l'insieme quoziente  $\mathbf{N}^+/\rho$ .

**6.** Sia  $X = \{n \in \mathbf{N} \mid n \geq 5\}$ . Nel prodotto cartesiano  $X \times X$  si consideri la seguente relazione: se  $a, b, c, d \in X$

$(a, b)\rho(c, d)$  se e solo se  $a$  divide  $c$  e  $b \leq d$ .

(i) Verificare che  $\rho$  è una relazione d'ordine in  $X \times X$ .

(ii) Stabilire se l'insieme ordinato  $(X \times X, \rho)$  è totalmente ordinato.