Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea Triennale in Matematica, a.a. 2001/2002
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Tutorato
Mercoledi 5 dicembre

1. Costruire due polinomi distinti di $A[X]$ che assumano lo stesso valore su ogni elemento di A nel caso in cui $A = \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$.

2. Costruire un polinomio $f(X)$ di $\mathbb{Z}_2$ tale che $f(0) = a$, $f(1) = b$, per ogni coppia (a, b) di elementi di $\mathbb{Z}_2$. Dedurre che ogni applicazione da $\mathbb{Z}_2$ a $\mathbb{Z}_2$ è polinomiale.

3. Costruire un polinomio $f(X)$ di $\mathbb{Z}_3$ tale che $f(0) = 2$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$.

4. Sia p un numero primo . Mostrare che ogni applicazione da $\mathbb{Z}_p$ a $\mathbb{Z}_p$ è polinomiale.

5. Utilizzando il metodo delle divisioni successive determinare il MCD ed una identitá di Bézout per i seguenti polinomi di $\mathbb{Z}_{11}$:

$$f(X) = X^4 + 2X^3 - 5X^2 - 4X + 6 \qquad g(X) = 2X^2 + 5X + 4$$

6. Determinare le radici intere e razionali dei seguenti polinomi di $\mathbb{Z}[X]$:

1. $f(X) = 2X^4 - 7X^3 + 8X^2 - 7X + 6$
2. $g(X) = 3X^4 + 5X^3 + 2X^2 - 6X - 4$.

7. Si consideri il seguente polinomio di $\mathbb{Q}[X]$:

$$f_n(X) = 1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$$

1. Calcolare $f_1(X)$, $f_2(X)$, $f_3(X)$.
2. Utilizzando il punto 1), fare una ipotesi su $f_n(X)$, con $n \leq 1$, e provarla.