UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE
Corso di Laurea Triennale in Matematica
a.a. 2001/2002
AL1 - Algebra 1, fondamenti
Prima prova di valutazione intermedia
SOLUZIONI

1.

1. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$ si ha che $(g \circ f)(z) = g(f(z)) = g([\frac{z}{2}]) = 2[\frac{z}{2}]$; quindi se z è pari, $z = h$ con $h \in \mathbb{Z}$, $(g \circ f)(z) = 2[\frac{2h}{2}] = 2h = z$; se z è dispari, $z = 2k+1$ con $k \in \mathbb{Z}$, $(g \circ f)(z) = 2[\frac{2k+1}{2}] = 2k = z - 1$. Inoltre $(f \circ g)(z) = f(g(z)) = f(2z) = ([\frac{2z}{2}]) = z$; pertanto $f \circ g = id_{\mathbb{Z}}$.

   Quindi $(g \circ f)(1) = 0$ e $(f \circ g)(1) = 1$; pertanto $g \circ f \neq f \circ g$.

2. Da $f \circ g = id_{\mathbb{Z}}$ segue che g è iniettiva ed f suriettiva; poiché g è iniettiva e $g \circ f \neq 1_{\mathbb{Z}}$, g non è suriettiva; poiché f è suriettiva e $g \circ f \neq id_{\mathbb{Z}}$, f non è iniettiva. Oppure g non è suriettiva poiché in $Im(g)$ non vi è alcun numero dispari ed f non è iniettiva poiché $f(0) = f(1)$.

3. Sia X un insieme finito e sia $\phi : X \longrightarrow X$ una applicazione; allora ϕ è iniettiva se e solo ϕ è se suriettiva, se e solo se ϕ è biiettiva; pertanto non si puó trovare una applicazione da X in X che è iniettiva e non suriettiva come g né una applizione da X in X che è suriettiva e non iniettiva come f.

2.

1. Poiché $1 = 2^0 5^0 11^0$, si ha che $[1]_\rho = \{2^a 5^b 11^c \mid a+b+c = 0\} = \{1\}$;

   da $4 = 2^2 5^0 11^0$ segue che $[4]_\rho = \{2^a 5^b 11^c \mid a+b+c = 2\} = \{10, 22, 55, 4, 25, 121\}$;

   da $5 = 2^0 5^1 11^0$ segue che $[5]_\rho = \{2^a 5^b 11^c \mid a+b+c = 1\} = \{2, 5, 11\}$;

   da $110 = 2^1 5^1 11^1$ segue che $[110]_\rho = \{2^a 5^b 11^c \mid a+b+c = 3\} = \{8, 125, 1331, 20, 44, 275, 605, 50, 242, 110\}$.

2. Sia $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{N}$ l'applicazione definita da $\varphi(2^a 5^b 11^c) = a+b+c$; φ è suriettiva (se $n \in \mathbb{N}$, allora $\varphi(2^n 5^0 11^0) = n$) e la relazione $\equiv_\varphi$ coincide conρ. Pertanto l'insieme quoziente S/ρ è isomorfo a$\mathbb{N}$.

3.

1. Da $5 = 2^0(2 \cdot 2 + 1)$ e $22 = 2^1(2 \cdot 5 + 1)$ segue che $5\rho 22$;
   da $4 = 2^2(2 \cdot 0 + 1)$ e $9 = 2^0(2 \cdot 4 + 1)$ segue che $9\rho 4$;
   da $16 = 2^4(2 \cdot 0 + 1)$ e $20 = 2^2(2 \cdot 2 + 1)$ segue che $20\rho 16$;
   da $10 = 2^1(2 \cdot 2 + 1)$ e $15 = 2^0(2 \cdot 7 + 1)$ segue che $15\rho 10$.

2. La ρ gode della propriet totale poiché, presi comunque due numeri naturali positivi distinti $n = 2^\alpha(2s+1)$ ed $m = 2^\beta(2t+1)$, confrontando α e β rispetto all'usuale relazione d'ordine in $\mathbb{N}$, si ha che:

   (a) $\alpha < \beta$ da cui $n\rho m$;

   (b) $\beta < \alpha$ da cui $m\rho n$;

   (c) $\alpha = \beta$; in questo caso si confrontano s e t rispetto all'usuale relazione d'ordine in $\mathbb{N}$; se $s < t$ si ha che $n\rho m$, se $t < s$ si ha che $m\rho n$.

3. Poiché $1 = 2^0(2 \cdot 0 + 1)$, si ha $1\rho n$ per ogni numero naturale positivo n; 1 è pertanto il minimo di $(\mathbb{N}^+, \rho)$. Non esistono elementi massimali, poiché per ogni $n = 2^\alpha(2s+1)$ si ha che $n' = 2^{\alpha+1}(2s+1)$ è tale che $n \neq n'$ e $n\rho n'$.

4.

1. Base dell'induzione: per $n = 2$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$$

   in quanto $\sqrt{2} + 1 > 2$ essendo $\sqrt{2} > 1$.

   Passo induttivo: sia $n \geq 2$ e sia vero per n che $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$; allora $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}$ essendo $\sqrt{n^2+n}+1 > n$.

2. Base dell'induzione: per $n = 1$ si ha $\binom{1}{0} - \binom{1}{1} = 1 - 1 = 0$.

   Passo induttivo: sia $n \geq 1$ e sia vero che $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n} = 0$; allora

   $\binom{n+1}{0}-\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n+1}{n-1}+(-1)^n\binom{n+1}{n}+(-1)^{n+1}\binom{n+1}{n+1} =$
   $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}\binom{n}{0}+\binom{n}{2}++\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-2}+(-1)^n\binom{n}{n}+$

$(-1)^n\binom{n}{n-1} + (-1)^{n+1}\binom{n}{n} = [\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}] - [\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}] = 0 - 0 = 0.$

Sono stati utilizzati i seguenti due fatti:

(a) definizione del coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1};$$

(b) $(-1)^n = -(-1)^{n+1}$.

5.

1. Le radici ottave dell'unitá sono:

   $\zeta_0 = \cos(\frac{2\pi}{8}) + i\sin(\frac{2\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

   $\zeta_1 = \cos(\frac{4\pi}{8}) + i\sin(\frac{4\pi}{8}) = i$;

   $\zeta_2 = \cos(\frac{6\pi}{8}) + i\sin(\frac{6\pi}{8}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

   $\zeta_3 = \cos(\frac{8\pi}{8}) + i\sin(\frac{8\pi}{8}) = -1$;

   $\zeta_4 = \cos(\frac{10\pi}{8}) + i\sin(\frac{10\pi}{8}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

   $\zeta_5 = \cos(\frac{12\pi}{8}) + i\sin(\frac{12\pi}{8}) = -i$;

   $\zeta_6 = \cos(\frac{14\pi}{8}) + i\sin(\frac{14\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

   $\zeta_7 = \cos(\frac{16\pi}{8}) + i\sin(\frac{16\pi}{8}) = 1$.

   Le radici ottave primitive sono $\varphi(8) = 4$; precisamente sono $\xi = \zeta_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\xi^h = \cos(\frac{2\pi h}{8}) + i\sin(\frac{2\pi h}{8})$ con $1 \le h < 8$ e $\mathrm{MCD}(h, 8) = 1$; quindi

   $\xi = \zeta_0$,

   $\xi^3 = \zeta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$,

   $\xi^5 = \zeta_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$,

   $\xi^7 = \zeta_6 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Le radici quadrate dell'unità sono $i = \zeta_1$ e $-i = \zeta_5$; le radici quarte dell'unità sono $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \zeta_0$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \zeta_2$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \zeta_4$ e $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \zeta_6$.

3. $\Phi_8(X) = (X - \zeta_0)(X - \zeta_2)(X - \zeta_4)(X - \zeta_6) = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) = X^4 + 1$.